
Podstawy sterowania

Kompilacja wykładów i książki „Obserwacja i sterowanie w systemach dynamicznych”
dr hab. inż. Witolda Byrskiego, prof. nadzw. AGH

Spis treści

| | |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 1 Sprzężenie zwrotne. Zadania układu regulacji..... | 3 |
| 1.1 Sprzężenie zwrotne..... | 3 |
| 1.2 Zadania układu regulacji..... | 3 |
| 2 Modele procesów fizycznych i ich opisy. Modele sygnałów. Zasady ciągłości..... | 4 |
| 2.1 Modele procesów fizycznych..... | 4 |
| 2.2 Stany przejściowe..... | 4 |
| 2.3 Modele sygnałów..... | 5 |
| 2.4 Rząd układu..... | 5 |
| 2.5 Zasady ciągłości..... | 5 |
| 3 Modele dynamiczne liniowe i nieliniowe..... | 6 |
| 3.1 Człon inercyjny I rzędu..... | 6 |
| 3.2 Człon różniczkujący z inercją I rzędu..... | 6 |
| 3.3 Układ II rzędu (oscylacyjny)..... | 7 |
| 3.4 Model hydraulicznego członu całkującego (zbiornik liniowy bezodpływowy)..... | 7 |
| 3.5 Model hydraulicznego obiektu inercyjnego (zbiornik liniowy z odpływem swobodnym)..... | 8 |
| 3.6 Tabela zbiorcza obiektów..... | 8 |
| 3.7 Modele dynamiczne nieliniowe..... | 10 |
| 3.8 Model zbiornika stożkowego z odpływem..... | 10 |
| 4 Transformata Laplace'a. Transmitancja operatorowa. Odpowiedź układu na wymuszenia harmoniczne. Modelowanie systemów dynamicznych..... | 11 |
| 4.1 Transformata Laplace'a..... | 11 |
| 4.2 Własności transformaty Laplace'a..... | 12 |
| 4.3 Odwrotna transformata Laplace'a..... | 12 |
| 4.4 Rozwiązywanie równań różniczkowych techniką operatorową..... | 13 |
| 4.5 Transmitancja operatorowa..... | 13 |
| 4.6 Własności transmitancji..... | 13 |
| 4.7 Transmitancja układów wielowymiarowych..... | 14 |
| 4.8 Algebra schematów blokowych..... | 14 |
| 4.9 Przykłady transmitancji układów skalarnych..... | 16 |
| 4.10 Odpowiedź na wymuszenie harmoniczne..... | 16 |
| 4.11 Transformata Fouriera..... | 17 |
| 4.12 Charakterystyki częstotliwościowe układów dynamicznych..... | 17 |
| 4.13 Modelowanie systemów dynamicznych za pomocą równań różniczkowych stanu..... | 18 |
| 4.14 Wyliczanie macierzy funkcyjnej..... | 19 |
| 5 Wektory własne i wartości własne macierzy. Transformacje liniowe zmiennych stanu. Transmitancja a równania stanu..... | 22 |
| 5.1 Definicja formalna macierzy liczbowej..... | 22 |
| 5.2 Definicja operatorowa macierzy..... | 22 |
| 5.3 Wektory własne i wartości własne macierzy..... | 22 |
| 5.4 Transformacje liniowe zmiennych stanu..... | 22 |
| 5.5 Impulsowa funkcja przejścia..... | 23 |
| 5.6 Transmitancja a równania stanu..... | 23 |
| 5.7 Naturalne zmienne stanu..... | 25 |
| 5.8 Równanie -tego rzędu..... | 26 |
| 5.9 Postać sterowalna..... | 26 |
| 6 Obiekt, sterowanie i wyjście. Struktury systemów sterowania..... | 27 |
| 6.1 Zadania automatyki..... | 27 |
| 6.2 Sterowanie w układzie otwartym i układzie zamkniętym..... | 27 |
| 6.3 Zadania sterowania..... | 28 |
| 6.4 Systemy automatyki procesowej i zabezpieczeniowej..... | 28 |
| 6.5 Ogólny schemat układu regulacji ze sprzężeniem zwrotnym..... | 29 |
| 6.6 Przykładowe realizacje jednowymiarowych układów regulacji SISO..... | 29 |
| 6.6.1 Układ klasyczny..... | 29 |
| 6.6.2 Układ kaskadowy..... | 30 |
| 6.6.3 Układ adaptacyjny..... | 30 |

| | | |
|-----------|----------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 6.7 | Algorytmy ciągłej regulacji PID | 31 |
| 6.7.1 | Regulator proporcjonalny P | 32 |
| 6.7.2 | Regulator proporcjonalno-różniczkujący PD | 33 |
| 6.7.3 | Regulator proporcjonalno-całkujący PI | 33 |
| 6.7.4 | Regulator proporcjonalno-całkująco-różniczkujący PID (idealny) | 33 |
| 6.7.5 | Regulator proporcjonalno-całkująco-różniczkujący PID z inercją (rzeczywisty) | 33 |
| 7 | Algorytmy dyskretne regulatorów PID. Stabilność | 34 |
| 7.1 | Algorytmy dyskretne regulatora PID | 34 |
| 7.2 | Reguła całkowania prostokątów (forward) | 34 |
| 7.3 | Aproksymacja wsteczna (backward) | 34 |
| 7.4 | Reguła całkowania trapezów | 35 |
| 7.5 | Transmitancja w przypadku ogólnym | 35 |
| 7.6 | Regulatory przekaźnikowe stosowane w układzie regulacji | 36 |
| 7.7 | Stabilność | 37 |
| 7.8 | Stabilność w sensie Lapunowa | 38 |
| 7.9 | Stabilność w sensie „ograniczone wejście – ograniczone wyjście” (BIBO) | 38 |
| 7.10 | Stabilność w sensie Lapunowa a stabilność w sensie BIBO | 38 |
| 8 | Kryteria oceny stabilności. Systemy nieliniowe | 40 |
| 8.1 | Kryterium Hurwita | 40 |
| 8.2 | Kryterium Nyquista | 40 |
| 8.3 | Stabilność układów liniowych dyskretnych | 41 |
| 8.4 | Przekształcenie | 42 |
| 8.5 | Stabilność układów nieliniowych ciągłych | 42 |
| 8.6 | Punkty równowagi | 42 |
| 8.7 | Pierwsza metoda Lapunowa | 43 |
| 9 | Sterowalność i obserwowalność | 44 |
| 9.1 | Sterowalność | 44 |
| 9.2 | Warunek konieczny i dostateczny sterowalności układu liniowego | 44 |
| 9.3 | Sterowalność układów liniowych dyskretnych | 45 |
| 9.4 | Obserwowalność | 46 |
| 9.5 | Kryterium obserwowalności | 46 |
| 9.6 | Podział obserwatorów | 46 |
| 10 | Regulatory wielowymiarowe | 48 |
| 10.1 | Wskaźniki jakości | 48 |
| 10.2 | Regulator LQR | 48 |
| 10.3 | Algebraiczne równanie Riccatiego | 49 |

Indeks tabel

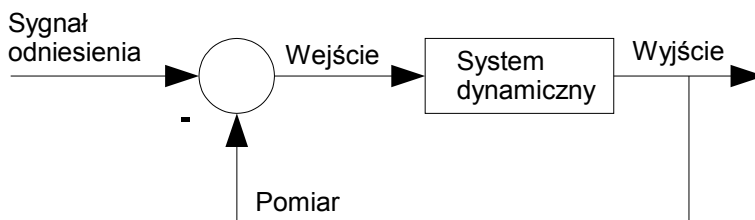
| | | |
|-------------|---------------------------------------------------------------|----|
| Tabela 2.1: | Typy modeli procesów fizycznych i równania je opisujące | 4 |
| Tabela 3.1: | Analogie występujące w układach mechanicznych i elektrycznych | 7 |
| Tabela 3.2: | Tabela zbiorcza obiektów | 9 |
| Tabela 4.1: | Przykładowe transformaty | 12 |
| Tabela 4.2: | Transformata wejścia i transmitancja a transformata wyjścia | 16 |

1 Sprzężenie zwrotne. Zadania układu regulacji.

1.1 Sprzężenie zwrotne

Sprzężenie zwrotne (*feedback*) jest przede wszystkim podstawową metodą sterowania systemami niestabilnymi. Ogólnie, sprzężenie zwrotne stosuje się zawsze w warunkach niepewności i niekompletności informacji o systemie i zakłóceniach. Reprezentowane jest przez łańcuch przyczynowo skutkowy, przedstawiający zależności:

Wejście → System Dynamiczny → Wyjście → Pomiar →
→ Porównanie z Sygnałem Odniesienia → Wejście

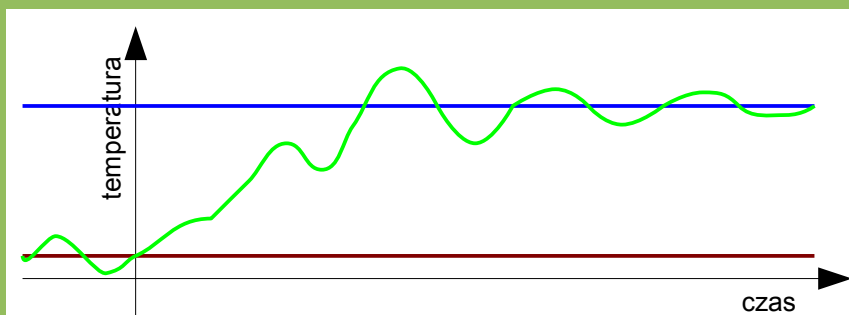


Rysunek 1.1: Układ z (ujemnym) sprzężeniem zwrotnym

1.2 Zadania układu regulacji

- **nadażanie** za sygnałem referencyjnym (odniesienia) wskazującym nowy poziom wyjścia

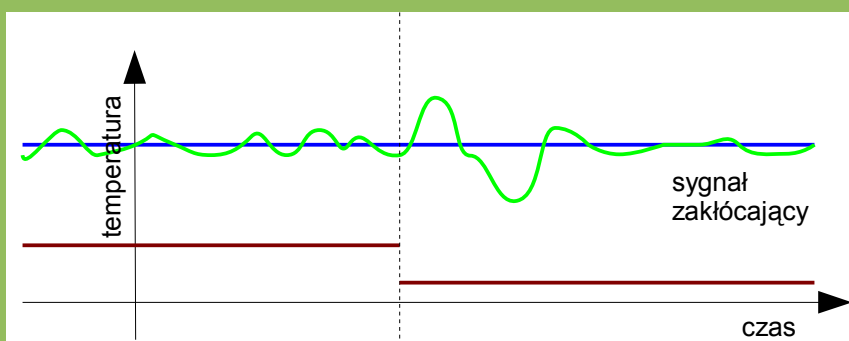
Przestawiamy żelazko z 60 na 80 st. → chcemy, by temperatura zmieniła się jak najszybciej.



Rysunek 1.2: Przykład nadążania

- **stabilizacja** zmiennej w punkcie pracy pomimo zjawienia się zakłócenia

Przykładamy żelazko do mokrych jeansów → chcemy, by utrzymało temperaturę.



Rysunek 1.3: Przykład stabilizacji

2 Modele procesów fizycznych i ich opisy. Modele sygnałów. Zasady ciągłości.

2.1 Modele procesów fizycznych

W automatyce rozróżniamy następujące typy modeli procesów fizycznych:

| | |
|--------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------|
| Stacyjne (równania algebraiczne) | Dynamiczne (równania różniczkowe) |
| Liniowe (równania liniowe) | Nieliniowe (równania nieliniowe) |
| O parametrach skupionych (równania różniczkowe zwyczajne) | O parametrach rozłożonych (równania różniczkowe cząstkowe) |
| Stacjonarne (równania o parametrach stałych w czasie) | Niestacjonarne (równania o parametrach zmiennych w czasie) |
| Ciągłe (równania różniczkowe) | Dyskretne (równania różnicowe) |
| Deterministyczne (równania deterministyczne) | Losowe (stochastyczne) (równania z teorii procesów stochastycznych) |
| Chaotyczne (równania różniczkowe nieliniowe) | |

Tabela 2.1: Typy modeli procesów fizycznych i równania je opisujące

Najprostsze modele dynamiki opisywane są przez liniowe, stacjonarne równania różniczkowe, a najtrudniejsze – przez nieliniowe, niestacjonarne równania cząstkowe.

Najważniejszy jest podział na modele **statyczne** i **dynamiczne**.

Modele statyczne tworzone są głównie dla celów poszukiwania optymalnego punktu pracy instalacji technologicznej.

Jak poustawiać różne parametry, żeby koszty produkcji były jak najniższe, a zysk jak największy.

Modele statyczne reprezentują zachowanie się systemu w stanach ustalonych (czyli np. w tymże punkcie optymalnym). Modele dynamiczne odwzorowują zachowanie się systemu w stanach przejściowych.

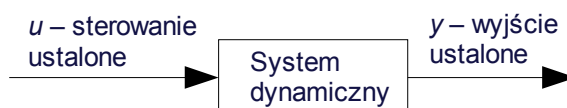
2.2 Stany przejściowe

Stany przejściowe wywołane są:

- planowymi zmianami punktów pracy instalacji przez personel operatorski lub komputer sterujący
- nieprzewidzianymi zakłóceniami oddziaływającymi na zmienne sterujące, zmienne wyjściowe i parametry procesu

I tu wracamy do [zadań układu regulacji](#).

System fizyczny uznawany jest za **statyczny** (pozbawiony dynamiki), gdy wielkość wyjściowa $y(t_1)$ dla każdej chwili t_1 zależy tylko od wejścia $u(t_1)$ i nie zależy od wartości $u(t)$ dla $t \neq t_1$. W rzeczywistości idealne systemy statyczne nie istnieją.



Rysunek 2.1: Model statyczny

Modele statyczne można też przypisać wielu procesom i obiektom automatyki, mimo ich istniejącej

dynamiki. Mogą one być rozważane jako charakterystyki ich stanów ustalonych. Można je uzyskać przyrównując do zera wszystkie pochodne zmiennych procesowych po czasie w równaniach różniczkowych zwyczajnych, opisujących dynamikę procesu.

Mamy obiekt liniowy określony równaniem:

$$\ddot{x}(t) + 0,1 \dot{x}(t) + x(t) = 0,1 u(t)$$

Model statyczny tego procesu ma postać:

$$x = 0,1 u$$

2.3 Modele sygnałów

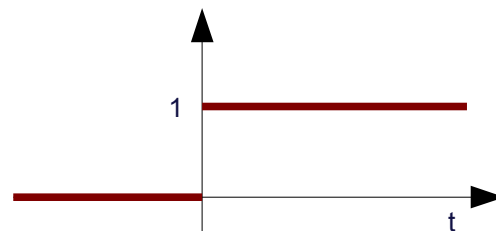
1. Skok jednostkowy $1(t)$:

$$1(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

2. Impuls jednostkowy z parametrem α , $\Delta(t, \alpha)$:

a) $\Delta(t, \alpha) : \int_{-\infty}^{\infty} \Delta(t, \alpha) dt = 1$

b) $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \Delta(t, \alpha) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases}$



Rysunek 2.2: Skok jednostkowy

3. Delta Diraca $\delta(t)$:

a) $\delta(t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \Delta(t, \alpha) \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$

b) $\delta(t) = \frac{d}{dt} 1(t) \Rightarrow \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = 1(t)$

2.4 Rząd układu

Rząd układu (równania różniczkowego) pokrywa się z reguły z ilością niezależnych magazynów energii (pojemności), pomiędzy którymi może następować jej wymiana.

Pojemność = człon całkujący.

2.5 Zasady ciągłości

Zasady ciągłości, stosowane do budowy modeli dynamicznych:

1. **Zasada ciągłości pędu** (bilans sił)

$$\frac{d[m(t) \cdot v_i(t)]}{dt} = \frac{d m(t)}{dt} v_i(t) + \frac{d v_i(t)}{dt} m(t) = \sum_{j=1}^N F_{ij}(t)$$

gdzie $v_i(t)$ - prędkość w i -tym kierunku, F_{ij} - j -ta składowa sił w i -tym kierunku

2. **Zasada ciągłości masy** (bilans materiałowy)

Dla układu dynamicznego szybkość zmiany magazynowanej masy równa się różnicy dopływu i odpływu masy do układu.

3. **Zasada ciągłości energii** (bilans cieplny)

Szybkość zmian energii układu równa się różnicy dopływu i odpływu energii układu przez konwekcję, dyfuzję, przewodzenie, promieniowanie plus ciepło wydzielone przez reakcję chemiczną, minus praca wykonana przez układ na otoczeniu.

3 Modele dynamiczne liniowe i nieliniowe.

3.1 Człon inercyjny I rzędu

1. Elektryczny:

$$i(t) = C \frac{du_2(t)}{dt} = \frac{1}{R} (u_1(t) - u_2(t))$$

Stąd ładunek: $q(t) = Cu_2(t)$

$$R \frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{C} q(t) = u_1(t)$$

2. Mechaniczny:

$$b \frac{dx_2(t)}{dt} + k(x_2(t) - x_1(t)) = 0$$

$$b \frac{dx_2(t)}{dt} + kx_2(t) = kx_1(t)$$

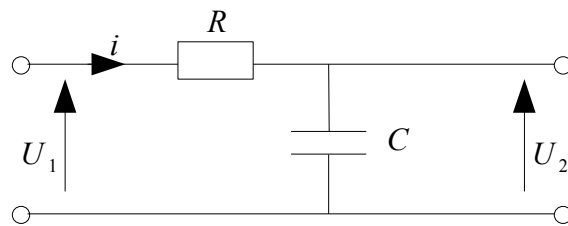
3. Ogólnie:

$$\dot{x}(t) = \frac{-x(t)}{T} + bu(t), \text{ dla danego } x(0) = x_0$$

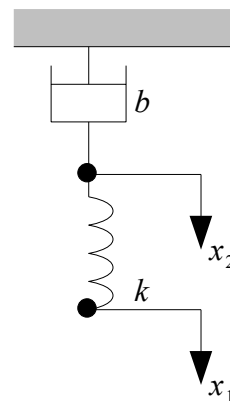
$$x(t) = b + e^{\frac{-t}{T}} (x_0 - b)$$

Co dla $x_0 = 0$ przechodzi w:

$$x(t) = b \left(1 - e^{\frac{-t}{T}} \right)$$



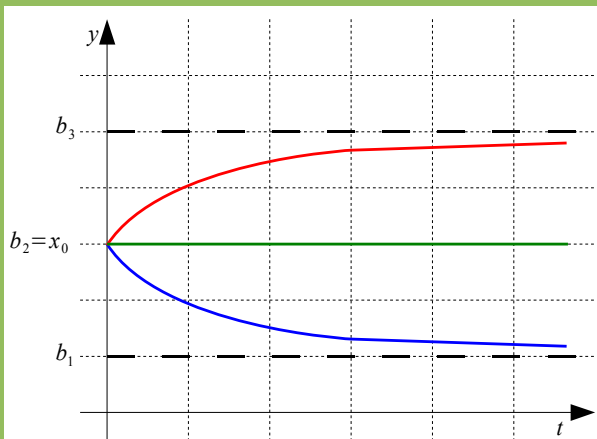
Rysunek 3.1: Układ RC



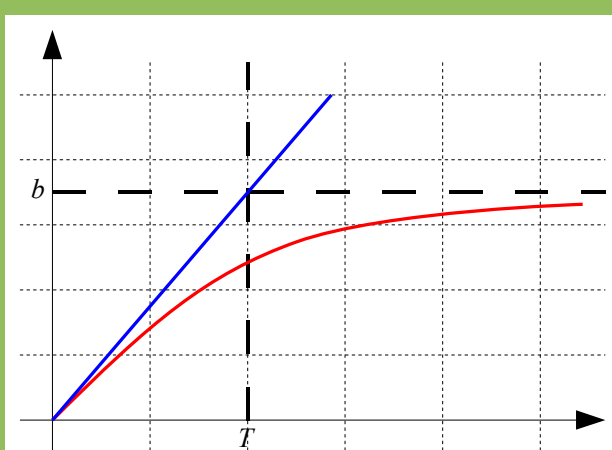
Rysunek 3.2: Układ mechaniczny

Ten wzór jest z książki, na wykładzie był inny.

WAŻNY JEST WARUNEK POCZĄTKOWY – STAN W JAKIM ZNAJDOWAŁ SIĘ UKŁAD W CHWILI $t=0$



Rysunek 3.3: Zależność rozwiązania od warunków początkowych



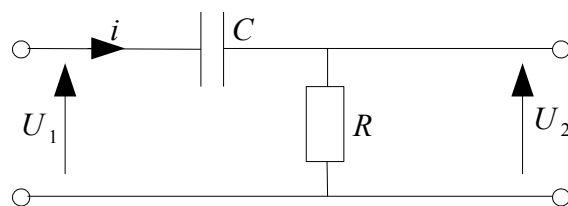
Rysunek 3.4: Rozwiązanie dla $x_0 = 0$

3.2 Człon różniczkujący z inercją I rzędu

Występuje pochodna na sygnale wejściowym.

1. Elektryczny:

$$C \frac{d(u_2(t) - u_1(t))}{dt} = \frac{-u_2(t)}{R}$$



Rysunek 3.5: Układ RC

$$R \frac{du_2(t)}{dt} + \frac{u_2(t)}{C} = R \frac{du_1(t)}{dt}$$

2. Mechaniczny:

$$b \frac{d(x_2(t) - x_1(t))}{dt} + kx_2(t) = 0$$

$$b \frac{dx_2(t)}{dt} + kx_2(t) = b \frac{dx_1(t)}{dt}$$

3.3 Układ II rzędu (oscylacyjny)

1. Elektryczny:

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau = e(t)$$

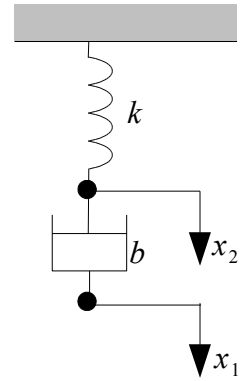
Przyjmując, że $q(t)$ to ładunek elektryczny:

$$L \ddot{q}(t) + R \dot{q}(t) + \frac{1}{C} q(t) = e(t)$$

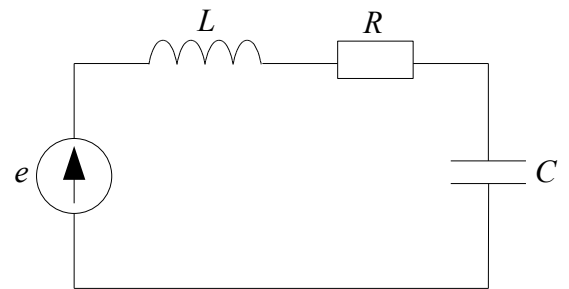
2. Mechaniczny:

Równanie równowagi sił:

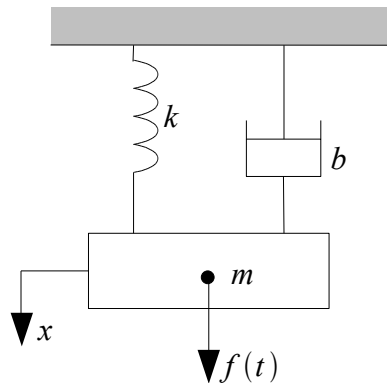
$$m \ddot{x}(t) + b \dot{x}(t) + kx(t) = f(t)$$



Rysunek 3.6: Układ mechaniczny



Rysunek 3.7: Układ szeregowy RLC



Rysunek 3.8: Układ mechaniczny II rzędu

| Układ mechaniczny | Układ elektryczny |
|----------------------------------------------------|--------------------------------|
| Siła f (moment T) | Napięcie u |
| Masa m (moment bezwładności J) | Indukcyjność L |
| Współczynnik tarcia wiskotycznego b | Opór R |
| Stała sprężyny k | Odwrotność pojemności C^{-1} |
| Przesunięcie x (kąt α) | Ładunek q |
| Szybkość $\dot{x} = v$ ($\dot{\alpha} = \omega$) | Prąd i |
| Moc $p = f\dot{v}$ | Moc $p = ui$ |

Tabela 3.1: Analogie występujące w układach mechanicznych i elektrycznych

3.4 Model hydraulicznego członu całkującego (zbiornik liniowy bezodpływowy)

Teoretyczna wysokość ścianek wynosi ∞ .

$Q(t)$ – masowe natężenie przepływu

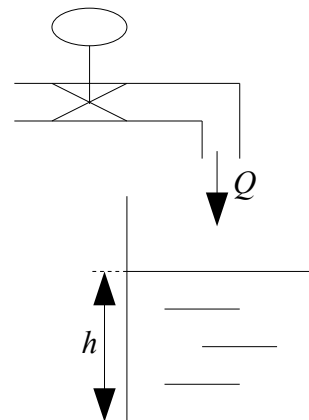
ρ – gęstość

P – pole powierzchni (const.)

$V(t) = Ph(t)$ – objętość

$$\rho P \frac{dh(t)}{dt} = Q(t) \Rightarrow T \dot{h}(t) = Q(t)$$

$$h(t) = \frac{1}{T} \int_0^t Q(\tau) d\tau \text{ dla } h(0) = 0$$



Rysunek 3.9: Zbiornik prostopadłościenny

Zbiornik prostopadłościenny jest dla zmiennej $h(t)$ członem całkującym.

3.5 Model hydraulicznego obiektu inercyjnego (zbiornik liniowy z odpływem swobodnym)

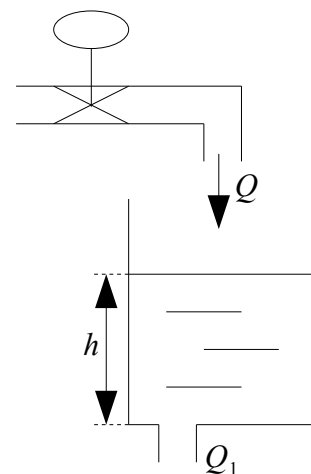
Ponieważ model ma być liniowy, nie może wystąpić w nim pierwiastek. Przybliżamy więc:

$$Q_1(t) = \frac{\sqrt{h(t)}}{R} \approx \frac{h(t)}{R}$$

$$\rho P \dot{h}(t) = Q(t) - \frac{h(t)}{R}$$

$$\dot{h}(t) = -\frac{1}{\rho P R} h(t) + \frac{1}{\rho P} Q(t)$$

Zbiornik z odpływem posiada cechę samowyrównywania poziomu tak jak obiekt inercyjny.



Rysunek 3.10: Zbiornik z odpływem

3.6 Tabela zbiorcza obiektów

Dla $K=0.5$ i $T=1$ (poza 8., gdzie $T=3$)

Idealny obiekt różniczkujący nie występuje w przyrodzie. Jego wykresów nie jestem pewna.

| | Równanie | Transmitancja | Nazwa obiektu | Odpowiedź $y(t)$ na: | |
|----|----------------------|---------------|----------------|----------------------|------------------|
| | | | | $u(t)=1(t)$ | $u(t)=\delta(t)$ |
| 1. | $y(t) = Ku(t)$ | K | proporcjonalny | | |
| 2. | $\dot{y}(t) = Ku(t)$ | $\frac{K}{s}$ | całkujący | | |

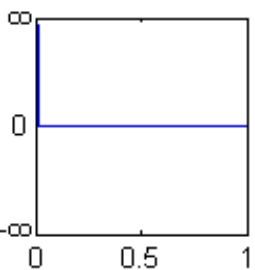
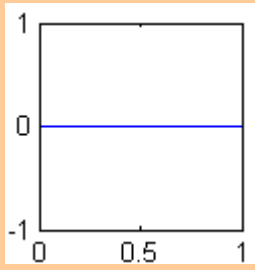
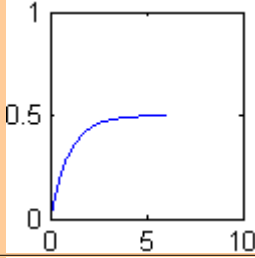
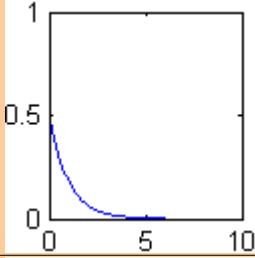
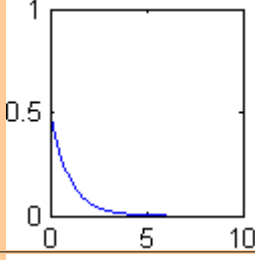
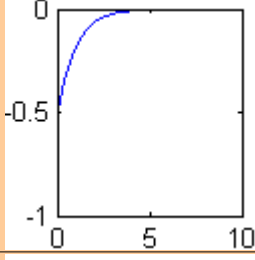
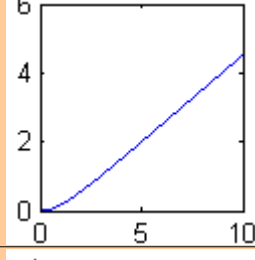
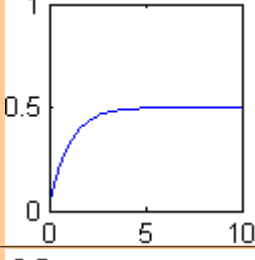
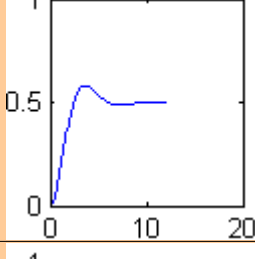
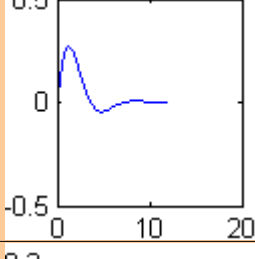
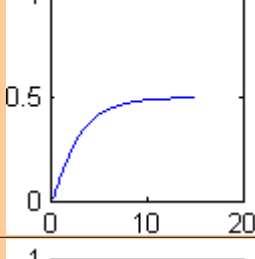
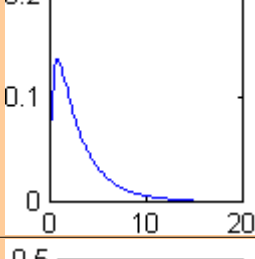
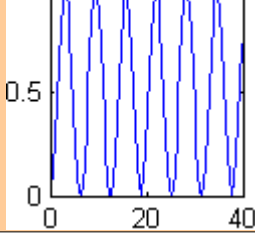
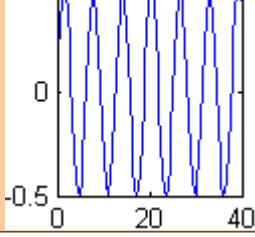
| | Równanie | Transmitancja | Nazwa obiektu | Odpowiedź $y(t)$ na: | |
|----|--------------------------------------|----------------------|---------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| | | | | $u(t)=1(t)$ | $u(t)=\delta(t)$ |
| 3. | $y(t)=K\dot{u}(t)$ | Ks | różniczkujący |  |  |
| 4. | $T\dot{y}(t)+y(t)=Ku(t)$ | $\frac{K}{Ts+1}$ | inercyjny I rzędu |  |  |
| 5. | $T\dot{y}(t)+y(t)=K\dot{u}(t)$ | $\frac{Ks}{Ts+1}$ | różniczkujący z inercją |  |  |
| 6. | $\ddot{y}(t)+T\dot{y}(t)=Ku(t)$ | $\frac{K}{s(s+T)}$ | całkująco-inercyjny |  |  |
| 7. | $\ddot{y}(t)+T\dot{y}(t)+y(t)=Ku(t)$ | $\frac{K}{s^2+Ts+1}$ | $T < 2$, II rzędu oscylacyjny |  |  |
| 8. | $\ddot{y}(t)+T\dot{y}(t)+y(t)=Ku(t)$ | $\frac{K}{s^2+Ts+1}$ | $T > 2$, II rzędu przetłumiony |  |  |
| 9. | $\ddot{y}(t)+y(t)=Ku(t)$ | $\frac{K}{s^2+1}$ | oscylacyjny |  |  |

Tabela 3.2: Tabela zbiorcza obiektów

3.7 Modele dynamiczne nieliniowe

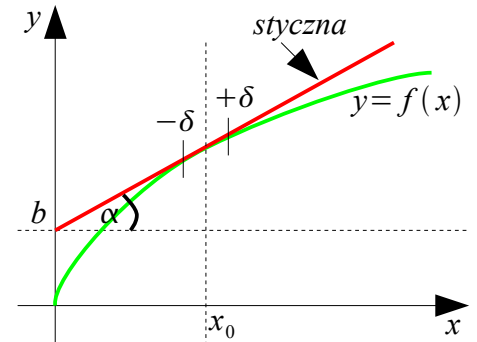
Dynamikę układów nieliniowych opisują równania różniczkowe nieliniowe. Np.:

$$\dot{y}(t) + 7[\dot{y}(t)]^2 + y(t) = u(t)$$

$$\dot{y}(t) + \dot{y}(t) \cdot y(t) + y(t) = u(t)$$

$$\dot{y}(t) + \dot{y}(t) + \sin(y(t)) = u(t)$$

Niektóre z tych równań różniczkowych można rozwiązać analitycznie, dla wielu jednak wzory nie istnieją. Wtedy można wykonać linearyzację danej nieliniowości w niewielkim wybranym obszarze (punkcie). Wykorzystuje się szereg Taylora ucięty do dwóch wyrazów.



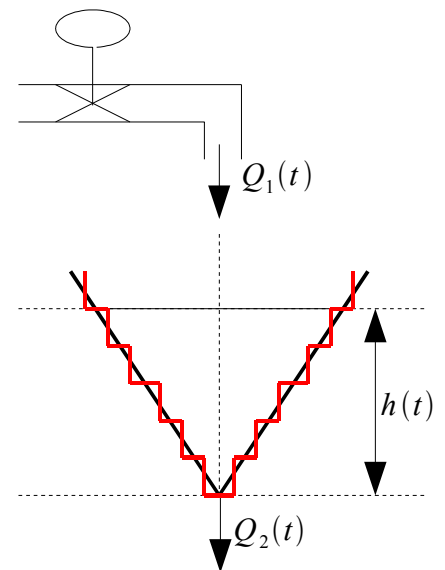
Rysunek 3.11: Przykład linearyzacji

WAŻNY JEST PUNKT PRACY – OD NIEGO ZALEŻY DOKŁADNOŚĆ LINEARYZACJI.

Nieliniowość $\Rightarrow a \cdot h + b$, gdzie $a = \text{tg}(\alpha)$.

3.8 Model zbiornika stożkowego z odpływem

Pole powierzchni cieczy w zbiorniku stożkowym zależy od wysokości słupa cieczy. Objętość $V(h)$ nie zmienia się więc w sposób liniowy. Najprostszym sposobem zamodelowania takiego układu jest uznanie go za liniowy w pewnych wybranych punktach pracy (czerwona linia na rysunku obok). Dokonuje się to poprzez rozwinięcie $V(h)$ w szereg Taylora w okolicy tych punktów.



Rysunek 3.12: Zbiornik stożkowy

4 Transformata Laplace'a. Transmitancja operatorowa. Odpowiedź układu na wymuszenia harmoniczne. Modelowanie systemów dynamicznych.

4.1 Transformata Laplace'a

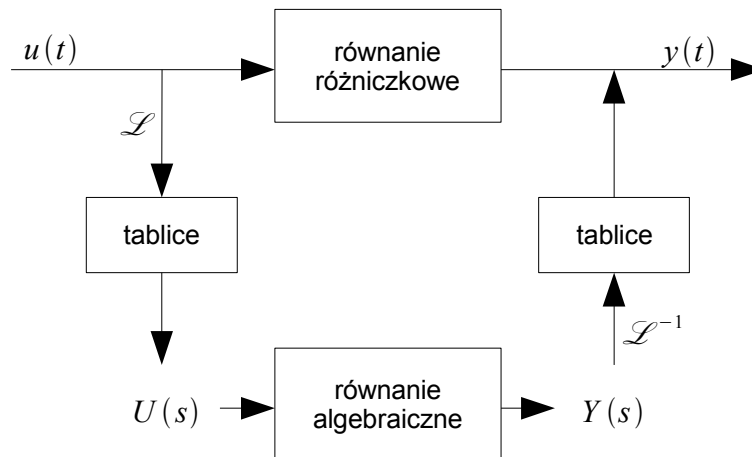
Transformatę Laplace'a definiuje się jako:

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

Danej funkcji $f(t)$ przyporządkowuje ona funkcję $F(s)$, gdzie $s = \alpha + j\omega$. Aby transformata istniała, musi istnieć dla danej funkcji $f(t)$ przynajmniej jedno s , dla których taka całka istnieje, tzn. jest mniejsza od ∞ :

$$\left| \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \right| < \infty$$

Transformata Laplace'a nie istnieje np. dla $f(t) = e^{t^2}$, ponieważ funkcja ta rośnie szybciej niż e^{-st} maleje.



Rysunek 4.1: Schemat stosowania transformaty Laplace'a

| Oryginalna $f(t)$ | Transformata $F(s)$ |
|-------------------------------|------------------------------------|
| $\delta(t)$ | 1 |
| $1(t)$ | $\frac{1}{s}$ |
| $1(t)e^{-at}$ | $\frac{1}{s+a}$ |
| $\frac{1}{a}(1 - e^{-at})$ | $\frac{1}{s(s+a)}$ |
| $1(t) \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ | $\frac{1}{s^n}$ |
| $1(t)t e^{-at}$ | $\frac{1}{(s+a)^2}$ |
| $1(t)t^n e^{-at}$ | $\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$ |
| $1(t)(1 - e^{-t})^n$ | $\frac{n!}{s(s+1)(s+2)\dots(s+n)}$ |

| Oryginalna $f(t)$ | Transformata $F(s)$ |
|------------------------------|-------------------------------------|
| $1(t) \sin(\omega t)$ | $\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$ |
| $1(t) \cos(\omega t)$ | $\frac{s}{s^2 + \omega^2}$ |
| $1(t)e^{-at} \sin(\omega t)$ | $\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$ |

Tabela 4.1: Przykładowe transformaty

4.2 Własności transformaty Laplace'a

1. Liniowość:

$$af_1(t) + bf_2(t) \Leftrightarrow aF_1(s) + bF_2(s)$$

2. Skalowalność:

$$f(at) \Leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

3. Przesunięcie w czasie:

$$f(t-\tau) \Leftrightarrow F(s)e^{-s\tau}$$

4. Przesunięcie w dziedzinie częstotliwości:

$$e^{-at} f(t) \Leftrightarrow F(s+a)$$

5. Spłot w dziedzinie czasu:

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) * f_2(t-\tau) d\tau \Leftrightarrow F_1(s) \cdot F_2(s)$$

6. Spłot w dziedzinie częstotliwości:

$$f_1(t) \cdot f_2(t) \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} F_1(u) \cdot F_2(s-u) du$$

7. Jednostronne różniczkowanie w dziedzinie czasu:

$$\frac{df(t)}{dt} \Leftrightarrow sF(s) - f(0^-)$$

8. Jednostronne różniczkowanie w dziedzinie czasu dla zerowych warunków początkowych i dla niezerowych warunków początkowych:

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \Leftrightarrow s^n F(s)$$

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \Leftrightarrow s^n F(s) + s^{n-1} f(0^-) - s^{n-2} f^{(1)}(0^-) - \dots - f^{(n-1)}(0^-)$$

4.3 Odwrotna transformata Laplace'a

Problem transformacji odwrotnej sprowadza się do rozwiązania równania całkowego Laplace'a:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

a poszukiwana funkcja $f(t)$ będzie rozwiązaniem transformacji odwrotnej Laplace'a:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$$

4.4 Rozwiązywanie równań różniczkowych techniką operatorową

Mamy równanie:

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 6y(t) = \dot{u}(t) + 3u(t)$$

Warunki początkowe zerowe: $y(0)=0$, $\dot{y}(0)=0$, $\ddot{y}(0)=0$.

Funkcja wymuszająca $u(t)=\delta(t)$ dla $t \geq 0$.

Po zastosowaniu transformacji Laplace'a otrzymuje się:

$$Y(s)(s^3 + 3s^2 + 6s + 4) = (s + 3)U(s)$$

gdzie $U(s)=1$.

Stosujemy rozkład na ułamki proste:

$$Y(s) = \frac{s+3}{(s^2+2s+4)(s+1)} = \frac{Bs+C}{s^2+2s+4} + \frac{A}{s+1}$$

$$s+3 \equiv (s+1)(Bs+C) + A(s^2+2s+4)$$

$$s+3 \equiv Bs^2 + Cs + Bs + C + As^2 + 2As + 4A$$

$$s+3 \equiv s^2(A+B) + s(2A+B+C) + 4A+C$$

Porównujemy współczynniki lewej i prawej strony przy jednakowych potęgach s :

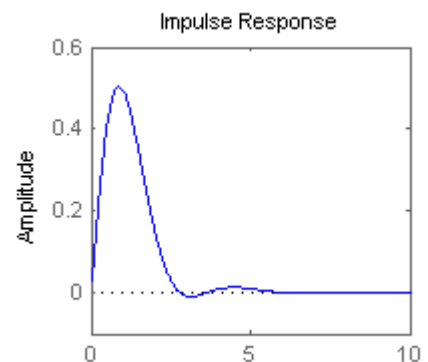
$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2A+B+C=1 \\ 4A+C=3 \end{cases} \Rightarrow A=\frac{2}{3}, B=-\frac{2}{3}, C=\frac{1}{3}$$

$$Y(s) = \frac{2}{3} \frac{1}{s+1} - \frac{2}{3} \frac{s+1}{(s+1)^2+3} + \frac{1}{3} \frac{3}{(s+1)^2+3}$$

Rozwiązanie ma więc postać:

$$y(t) = \left[\frac{2}{3} e^{-t} - \frac{2}{3} e^{-t} \cos \sqrt{3}t + \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-t} \sin \sqrt{3}t \right] \cdot 1(t)$$

Gdybyśmy chcieli powrócić na wspólną kreskę ułamkową, to trzeba pomnożyć $(Bs+C) \cdot (s+1)$ i $A \cdot (s^2+2s+4)$



Rysunek 4.2: Rozwiązanie równania

Zadziałanie na układ deltą Diraca to trochę jak pstryknięcie sprężyny – drga przez chwilę, a potem wraca do stanu początkowego. Podanie na wejście skoku jednostkowego działa jak zawieszenie na sprężynie ciężarka – drga przez chwilę, a potem znajduje nowy punkt równowagi.

4.5 Transmitancja operatorowa

STOSUNEK TRANSFORMATY LAPLACE'A FUNKCJI WYJŚCIA SYSTEMU DO TRANSFORMATY LAPLACE'A WEJŚCIA SYSTEMU (PRZY ZEROWYCH WARUNKACH POCZĄTKOWYCH) TWORZY UŁAMEK WYMIERNY ZMIENNEJ s I NAZYWA SIĘ TRANSMITANCJĄ OPERATOROWĄ SYSTEMU $G(s)$.

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{L(s)}{M(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = G(s)$$

Pierwiastki wielomianu licznika ($L(s)$) nazywane są **zerami** transmitancji, a pierwiastki mianownika ($M(s)$) – **biegunami**.

4.6 Własności transmitancji

Aby transmitancja była realizowalna fizycznie, stopień licznika musi być mniejszy lub równy stopniowi mianownika ($m \leq n$).

Podczas korzystania z opisu za pomocą transmitancji należy pamiętać o dwóch jej cechach:

1. transmitancja nie uwzględnia wpływu warunków początkowych na rozwiązanie
2. transmitancja obejmuje swoim opisem dynamikę systemu związaną bezpośrednio z torem wejście-wyjście; niekiedy tor ten reprezentuje cały układ, ale niekiedy tylko jego część

4.7 Transmitancja układów wielowymiarowych

W liniowych układach wielowymiarowych przy wielu różnych wejściach i wielu różnych wyjściach można określać transmitancje torów skrośnych pomiędzy i -tym wejściem i j -tym wyjściem:

$$\frac{Y_j(s)}{U_i(s)} = G_{ij}(s)$$

Transmitancja $G(s)$ tworzona jest więc jako macierz transmitancji skalarnych $G_{ij}(s)$.

Dla przykładu z [rysunku 4.3](#) można to przedstawić następująco:

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}$$

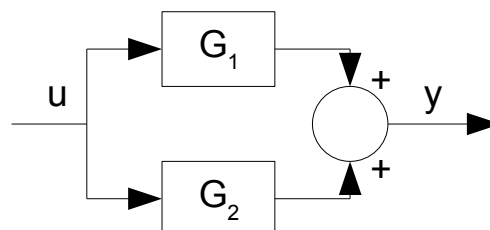
Układy wielowymiarowe stanowią pewną trudność dla zadań sterowania, gdyż zmiana każdego z osobna sterowania powoduje jednoczesne zmiany wielu wyjść.

Przykładem układu wielowymiarowego może być helikopter. Gdy damy sygnał do lotu w górę, helikopter „będzie chciał” kręcić się bardziej niż przed chwilą, w związku z czym zwiększą się obroty śmigła bocznego. Ta zmiana z kolei sprawi, że helikopter będzie ściągany w dół. Podobnie jest w przypadku chęci zmiany kierunku lotu. W skrócie: sterowania „góra-dół” i „skręć” nie są od siebie niezależne.

Aby rozseparować wpływ sterowań na wyjścia stosuje się sprzężenie zwrotne i specjalne układy odsprzęgające, dołączone do systemu sterowanego.

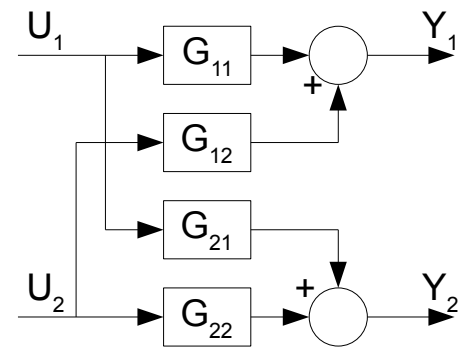
4.8 Algebra schematów blokowych

1. Połączenie równoległe transmitancji



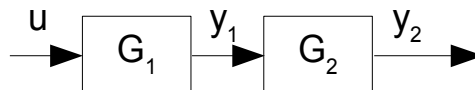
Rysunek 4.4: Połączenie równoległe transmitancji

$$G_z = G_1 + G_2$$



Rysunek 4.3: Przykład transmitancji wielowymiarowej

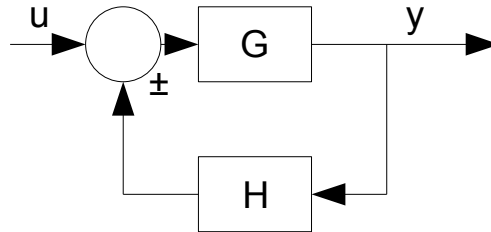
2. Połączenie szeregowe transmitancji



Rysunek 4.5: Połączenie szeregowe transmitancji

$$G_z = G_1 \cdot G_2$$

3. Sprzężenie zwrotne



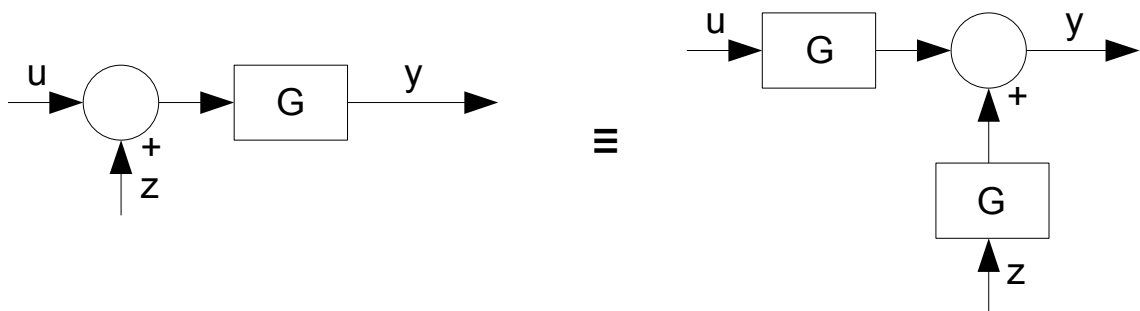
Rysunek 4.6: Sprzężenie zwrotne

$$G_z = \frac{G}{1 \mp G \cdot H}$$

+ przy ujemnym sprzężeniu zwrotnym

– przy dodatnim

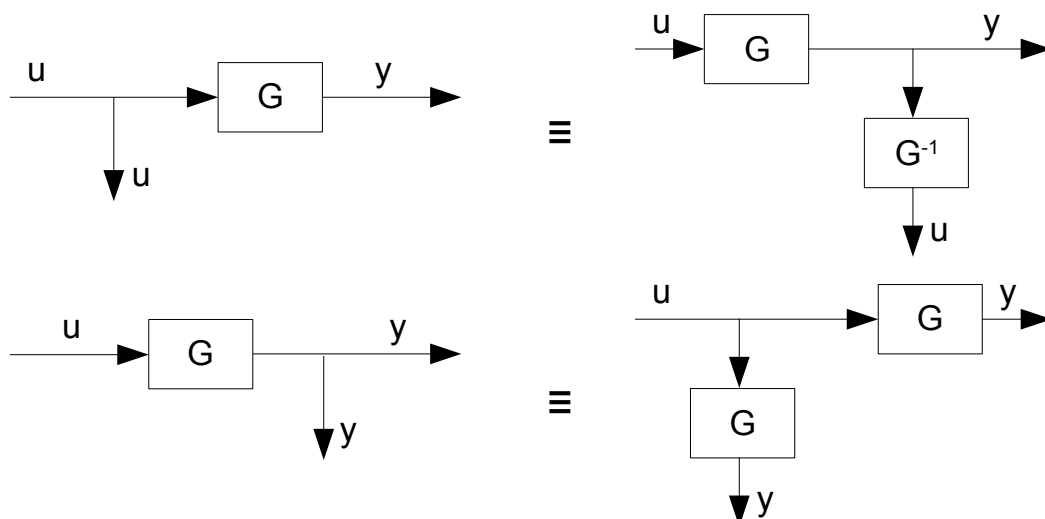
4. Przesuwanie węzła sumacyjnego



Rysunek 4.7: Przesuwanie węzła sumacyjnego

$$(U + Z)G = UG + ZG = Y$$

5. Przesuwanie węzła zaczepowego



Rysunek 4.8: Przesuwanie węzła zaczepowego

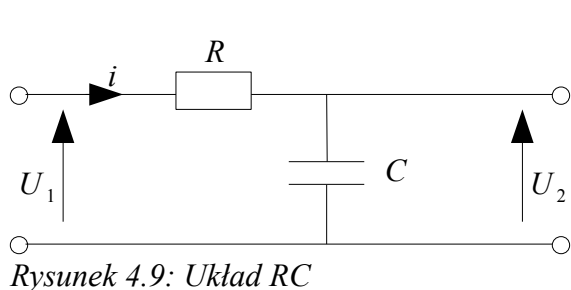
4.9 Przykłady transmitancji układów skalarnych

| Oryginał $u(t)$ | Transformata $U(s)$ | Transmitancja | Nazwa obiektu | Transformata odpowiedzi |
|--------------------------|---------------------|--------------------|--------------------------------|-------------------------|
| $\delta(t)$ | 1 | $\frac{1}{s(s+a)}$ | całkująco-inercyjny | $\frac{1}{s(s+a)}$ |
| $1(t)$ | $\frac{1}{s}$ | $\frac{1}{s+a}$ | inercyjny | $\frac{1}{s(s+a)}$ |
| $1(t) \cdot e^{-at}$ | $\frac{1}{s+a}$ | $\frac{1}{s}$ | całkujący | $\frac{1}{s(s+a)}$ |
| $\frac{1}{a}(1-e^{-at})$ | $\frac{1}{s(s+a)}$ | 1 | proporcjonalny o wzmacnieniu 1 | $\frac{1}{s(s+a)}$ |

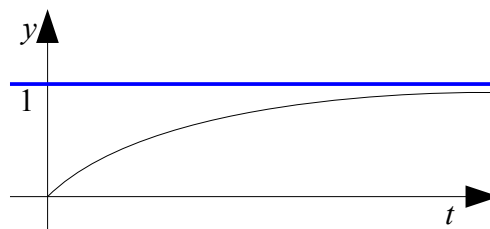
Tabela 4.2: Transformata wejścia i transmitancja a transformata wyjścia

Stabilny układ inercyjny rzędu I:

1. Układ RC:



Rysunek 4.9: Układ RC



Rysunek 4.10: Odpowiedź $y=u_2$ na skok u_1

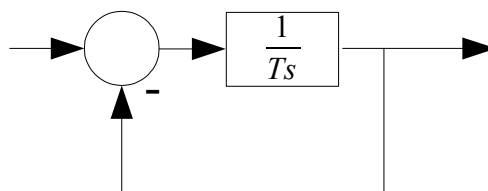
$$U_2(s) = \frac{1}{Cs} \cdot \frac{U_1(s)}{R + \frac{1}{Cs}}$$

$$G(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{1}{Rcs + 1} = \frac{1}{Ts + 1}$$

$$u_1(t) = KI(t)$$

$$y(t) = u_2(t) = K \left[1 - e^{-\frac{t}{T}} \right]$$

2. Człon całkujący z ujemnym sprzężeniem zwrotnym:



Rysunek 4.11: Człon całkujący z ujemnym sprzężeniem zwrotnym

$$G(s) = \frac{\frac{1}{Ts}}{1 + \frac{1}{Ts}} = \frac{1}{Ts + 1}$$

4.10 Odpowiedź na wymuszenie harmoniczne

Dla sterowania $u(t) = A \sin(\omega t) \Rightarrow U(s) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}$ i transmitancji $G(s) = \frac{K}{1 + sT}$ transformata

wyjścia (przy zerowych warunkach początkowych) może być rozłożona na ułamki proste. Po obliczeniach otrzymujemy:

$$Y(s) = \frac{AK\omega}{(Ts+1)(s^2+\omega^2)} = \frac{AK}{T^2\omega^2+1} \left(\frac{T^2\omega}{Ts+1} + \frac{\omega}{s^2+\omega^2} - \frac{sT\omega}{s^2+\omega^2} \right)$$

Stąd mamy:

$$y(t) = \frac{AK}{T^2\omega^2+1} \left(T\omega e^{-\frac{t}{T}} + \sin(\omega t) - T\omega \cos(\omega t) \right) = \frac{AKT\omega}{T^2\omega^2+1} e^{-\frac{t}{T}} + \frac{AK}{\sqrt{T^2\omega^2+1}} \sin(\omega t - \phi)$$

Gdzie $\operatorname{tg}(\phi) = \omega T$, co oznacza, że **sygnał na wyjściu jest zawsze opóźniony**.

Traktując transmitancję jako liczbę zespoloną ($s = j\omega$), można policzyć jej moduł w funkcji parametru częstotliwości ω :

$$G(j\omega) = \frac{K}{1+Tj\omega} = \frac{K(1-Tj\omega)}{1+T^2\omega^2} = \frac{K}{1+T^2\omega^2} - j \frac{KT\omega}{1+T^2\omega^2} = |G(j\omega)| e^{-j\phi(\omega)}$$

Jest to tzw. **transmitancja widmowa**, gdzie:

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}$$

$$\operatorname{tg}[\phi(\omega)] = \omega T$$

Ponieważ $t \rightarrow \infty \Rightarrow e^{-\frac{t}{T}} \rightarrow 0$ dla stanu ustalonego można zapisać:

$$y_u(t) = A \cdot |G(j\omega)| \cdot \sin(\omega t - \phi(\omega))$$

Wynik ten może być uogólniony na układy liniowe wyższego rzędu.

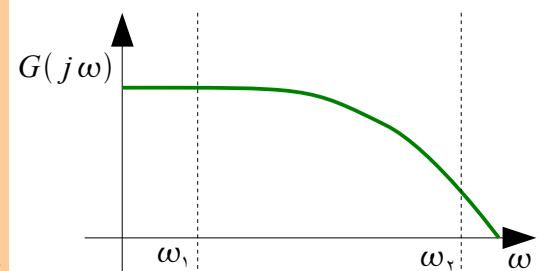
Założmy, że mamy kilka połączonych ze sobą zbiorników – z pierwszego woda przelewa się do drugiego itd. Bawimy się kranem nad pierwszym zbiornikiem, odkręcając i zakręcając go „w rytm” sinusoidy. Po pewnym czasie (gdy zbiorniki napełnią się do pewnych poziomów) zauważymy, że poziom wody w ostatnim zbiorniku podnosi się i opada zgodnie z „rytmem” sinusoidy wejściowej. Jest tylko trochę spóźniony w stosunku do odkręcanego i zakręcanego kranu.

Podsumowując:

JEŚLI NA WEJŚCIU BYŁ SINUS, TO NA WYJŚCIU TAKŻE (PO PEWNYM CZASIE) OTRZYMAMY SYGNAŁ SINUSOIDALNY. **NIE WAŻNE** JEST, JAKI BYŁ **RZĄD** UKŁADU.

SINUS WYJŚCIOWY MA TĄ SAMĄ CZĘSTOTLIWOŚĆ CO WEJŚCIOWY, RÓŻNIĆ SIĘ MOŻE AMPLITUDĄ I FAZĄ.

WRAZ ZE WZROSTEM CZĘSTOTLIWOŚCI ZMNIJSZA SIĘ MODUŁ TRANSMITANCJI, A CO ZA TYM IDZIE – **ZMNIJSZA SIĘ AMPLITUDA** SYGNAŁU NA WYJŚCIU.



Rysunek 4.12: Filtr dolnoprzepustowy

4.11 Transformata Fouriera

Każdy sygnał można przedstawić za pomocą sumy sinusoid o różnych częstotliwościach, amplitudach i fazach. Za pomocą transformaty Fouriera (dla funkcji spełniających pewne warunki) można wyznaczyć te właśnie sinusoidy.

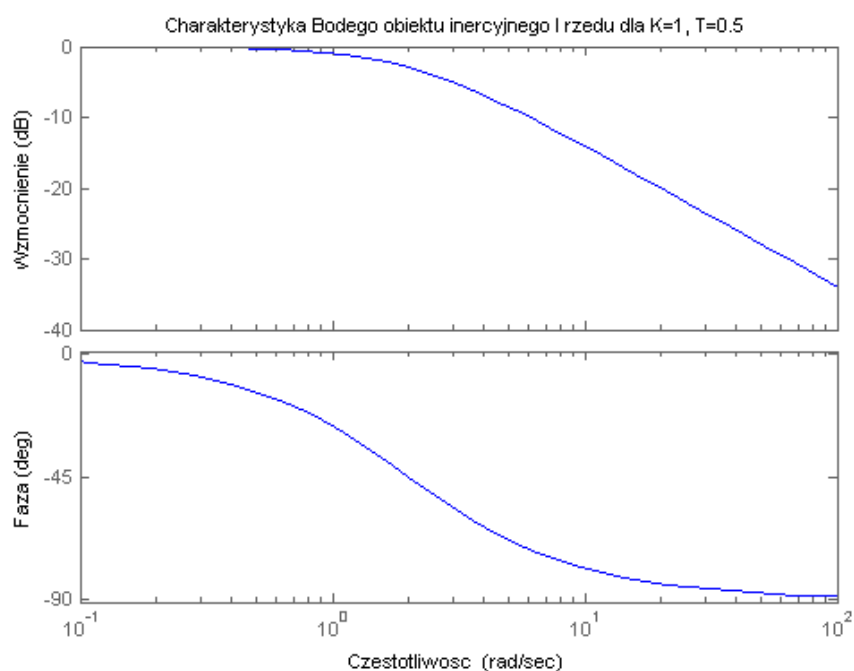
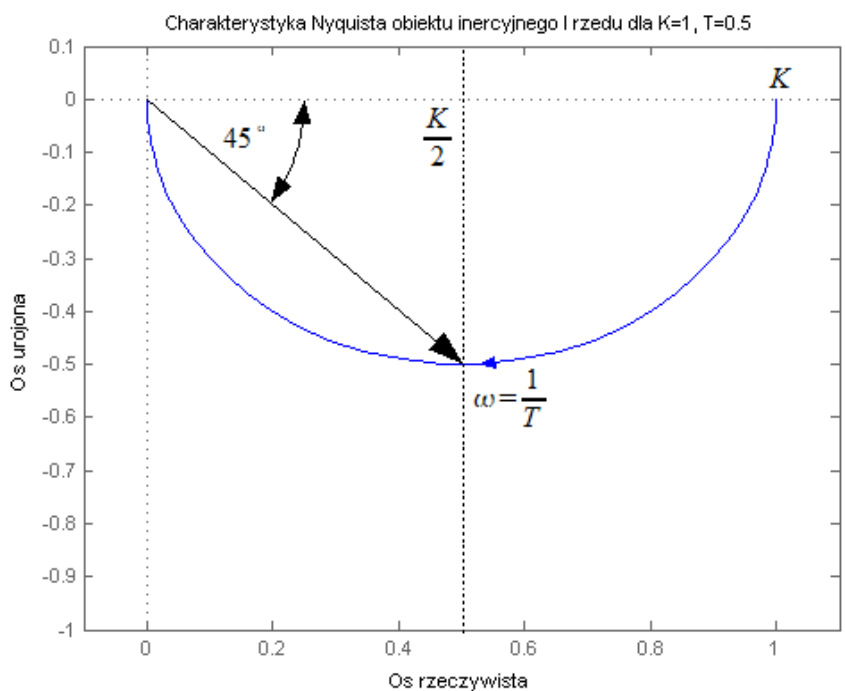
Założmy że z satelity ma być przesłany pewien sygnał, składający się z 10 000 liczb. Założmy też, że po wyliczeniu szybkiej transformaty Fouriera okazało się, że składa się on z 17 sinusoid. Lepiej jest przesłać $3(\text{amplituda}, \text{częstotliwość}, \text{faza}) * 17 = 51$ liczb niż 10 000.

4.12 Charakterystyki częstotliwościowe układów dynamicznych

Wyróżniamy dwa rodzaje charakterystyk:

- charakterystyka Nyquista, będąca charakterystyką amplitudowo-fazową; otrzymuje się ją poprzez narysowanie na płaszczyźnie Nyquista transmitancji widmowej ($G(j\omega)$) w funkcji parametru częstotliwości ω .
- charakterystyka Bodego, będąca charakterystyką amplitudową i fazową; są to wykresy logarymiczne wzmocnienia sygnału w zależności o częstotliwości oraz wykresy fazy w funkcji częstotliwości.

Dla obiektu inercyjnego I rzędu ($G(s) = \frac{K}{Ts+1}$, $\text{tg } \phi(\omega) = \omega T$) charakterystyki te są następujące:

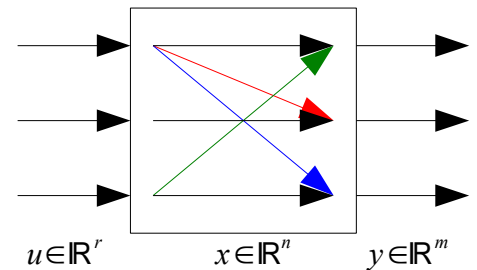


4.13 Modelowanie systemów dynamicznych za pomocą równań różniczkowych stanu

Stan x – najmniejsza liczba wielkości przypisanych do układu.

Aby przewidzieć **zachowanie układu** potrzebne są:

- wartości zmiennych stanu **w chwili początkowej** $t=t_0$ ($x(t_0)$)
- znajomość **modelu systemu**, czyli struktury powiązań między zmiennymi stanu
- znajomość **przebiegu sterowania** $u(t)$ na całym przedziale $[t_0, t_1]$



Rysunek 4.13: Układ dynamiczny

Wyjście y – wybrany zbiór wielkości procesowych, które są szczególnie interesujące z punktu widzenia modelowania lub systemu sterowania (np. należy je stabilizować).

Jako zmienne stanu w układach mechanicznych przyjmuje się **przesunięcia, prędkości i przyspieszenia**.

Jako zmienne stanu w układach elektrycznych przyjmuje się **napięcia** na pojemnościach C (kondensatorach) i **prądy** w indukcyjnościach L (cewkach).

STANDARDOWA FORMA **LINIOWEGO RÓWNANIA STANU** DLA UKŁADU STACJONARNEGO MA POSTAĆ:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) = x_0$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

DLA $\forall t \geq t_0: x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^r, y(t) \in \mathbb{R}^m$

Gdzie:

n – ilość wejść

r – ilość sterowań

m – ilość wyjść

A – macierz **stanu** o wymiarach $n \times n$

B – macierz **sterowania** $n \times r$

C – macierz **obserwacji** $m \times n$

D – macierz **wyjścia** $m \times r$

Ogólne rozwiązanie $x(t)$ ma postać:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x(t_0) + \underbrace{\int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau}_{\text{całka spłotowa}}$$

A funkcja wyjścia $y(t)$:

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)} x(t_0) + C \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau + Du(t)$$

DLA $t_0=0$ OTRZYMUJEMY:

$$x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$

Przykładowo dla $u(t)=1(t)$ i przy założeniu nieosobliwości A ($|A| \neq 0$) rozwiązanie ma postać:

$$x(t) = e^{At} x_0 + A^{-1} [e^{At} - I] B = e^{At} [x_0 + A^{-1} B] - A^{-1} B$$

4.14 Wylczenie macierzy funkcyjnej e^{At}

Niektóre metody wylczenia wykładczej postaci macierzy funkcyjnej e^{At} :

- z definicji szeregu wykładczego:

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!} = I + At + \frac{A^2 t^2}{2} + \frac{A^3 t^3}{6} + \dots$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad e^{At} = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

- z twierdzenia Sylwestera, wykorzystując wielomian interpolacyjny Lagrange'a $f(a) = e^{At}$
- jako odwrotne przekształcenie Laplace'a

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}]$$

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & \cdot \\ \cdot & \lambda \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} s-\lambda & \cdot \\ \cdot & s-\lambda \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s-\lambda)(s-\lambda)} \begin{bmatrix} s-\lambda & \cdot \\ \cdot & s-\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-\lambda} & \cdot \\ \cdot & \frac{1}{s-\lambda} \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \begin{bmatrix} e^t & \cdot \\ \cdot & e^t \end{bmatrix}$$

- transformacja do diagonalnej postaci Jordana

$$e^{At} = T e^{Jt} T^{-1}, \quad J = T^{-1} A T$$

gdzie:

λ_i – wartości własne

T_i – odpowiadające im wektory własne (główne) macierzy A

$T = [T_1, T_2, \dots, T_n]$ – modalna macierz transformacji A do postaci Jordana J

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & \cdot \\ -\gamma & -\gamma \end{bmatrix}$$

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ \gamma & \lambda + \gamma \end{vmatrix} = \lambda^2 + \gamma \lambda + \gamma$$

$$\Delta = \lambda^2 + \gamma \lambda + \gamma = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-\gamma \pm 1}{\gamma} = -\gamma, -1 \quad (\text{wartości własne } A)$$

Wektor własny $T_1 = \begin{pmatrix} T_{11} \\ T_{12} \end{pmatrix}$ obliczamy z równania $|\lambda_1 I - A| T_1 = 0$:

$$\begin{bmatrix} -\gamma & \cdot \\ \cdot & -\gamma \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ -\gamma & -\gamma \end{bmatrix} \begin{pmatrix} T_{11} \\ T_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -\gamma & -1 \\ \gamma & \cdot \end{bmatrix} \begin{pmatrix} T_{11} \\ T_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$$

$\begin{cases} -\gamma T_{11} - T_{12} = 0 \\ \gamma T_{11} + T_{12} = 0 \end{cases} \Rightarrow T_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ \gamma \end{bmatrix}$ (jedną współrzędną wybieramy dowolną (najczęściej 1 lub -1))

Wektor własny $T_2 = \begin{pmatrix} T_{21} \\ T_{22} \end{pmatrix}$ obliczamy z równania $|\lambda_2 I - A| T_2 = 0$:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ \gamma & \gamma \end{bmatrix} \begin{pmatrix} T_{21} \\ T_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \Rightarrow T_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = J$$

$$e^{At} = T \cdot e^{Jt} \cdot T^{-1} = T \cdot \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \cdot T^{-1} = \begin{bmatrix} -e^{-2t} - 2e^{-t} & -e^{-2t} - e^{-t} \\ 2e^{-2t} - 2e^{-t} & 2e^{-2t} - e^{-t} \end{bmatrix}$$

- numeryczne wyliczenie e^{At}

5 Wektory własne i wartości własne macierzy. Transformacje liniowe zmiennych stanu. Transmitancja a równania stanu.

5.1 Definicja formalna macierzy liczbowej

Układ liczb rozmieszczony w tablicy o m wierszach i n kolumnach nazywamy macierzą $[m \times n]$ wymiarową. Stanowi on odwzorowanie pary liczb (i, j) w element a_{ij} .

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

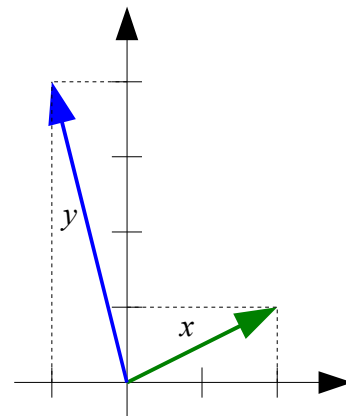
5.2 Definicja operatorowa macierzy

Każdy liniowy operator przekształcający skończenie wymiarową przestrzeń $X^n \rightarrow X^m$, (przy zadanych wektorach bazowych) ma postać macierzy $[m \times n]$ -wymiarowej.

Macierz kwadratowa przekształca elementy (wektory) przestrzeni X^n w inne elementy tej samej przestrzeni.

$$Ax = y, \quad x, y \in X^n$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$



Rysunek 5.1: Ilustracja definicji operatorowej macierzy

5.3 Wektory własne i wartości własne macierzy

Dla każdej macierzy kwadratowej $[n \times n]$ istnieją w przestrzeni X^n charakterystyczne wektory, które po przekształceniu przez tę macierz pozostają kolinearne, tzn. zmieniają tylko swoją długość z pewnym współczynnikiem λ . Wektory te nazywają się **wektorami własnymi** macierzy A , a współczynniki proporcjonalności nazywane są **wartościami własnymi** tej macierzy.

$$Aw = \lambda w \Rightarrow (A - \lambda I)w = 0$$

Aby powyższy układ posiadał **niezerowe** rozwiązanie dla wektora w , rząd macierzy $(A - \lambda I)$ musi być mniejszy od n . Stąd z warunku $\det[A - \lambda I] = 0$ otrzymuje się wielomian charakterystyczny, który posiada n pierwiastków λ_i . Dla danego $\lambda = \lambda_i$ wyznacza się z układu równań wektor w_i , ale tylko z dokładnością do współczynnika c , tzn. wektor $c \cdot w_i$ (c - dowolna stała) również spełnia ten układ. Z układu wyznacza się więc nie wektory, a raczej kierunki własne, które **nie ulegają zmianie** przy przekształceniu przez macierz A . Stąd wektory własne z reguły mogą być znormalizowane do jedności.

Jeśli wartości własne są pojedyncze, można wyznaczyć n wektorów własnych liniowo niezależnych. Macierz W , której kolumny są utworzone z wektorów własnych macierzy A , nazywa się **macierzą modalną** macierzy A .

5.4 Transformacje liniowe zmiennych stanu

Dany jest układ wielowymiarowy (MIMO, Multi Input - Multi Output):

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t), \quad x(\cdot) = x(\cdot) - \text{warunki początkowe}$$

$$x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad u(t) \in \mathbb{R}^r, \quad y(t) \in \mathbb{R}^m, \quad \forall t \geq 0$$

Można znaleźć **nieosobliwą** macierz transformacji podobieństwa T zbudowaną z wektorów własnych i głównych (macierz modalną), przekształcającą zmienne stanu x w inne zmienne stanu z :

$$x(t) = Tz(t)$$

Wtedy:

$$\dot{z}(t) = T^{-1}ATz(t) + T^{-1}Bu(t) = Jz(t) + \hat{B}u(t)$$

$$y(t) = CTz(t) = \hat{C}z(t)$$

$$z_0 = T^{-1}x_0$$

Po podstawieniu $T^{-1}AT = J$, rozwiązanie ma postać:

$$z(t) = e^{Jt}z_0 + \int_0^t e^{J(t-\tau)}\hat{B}u(\tau)d\tau$$

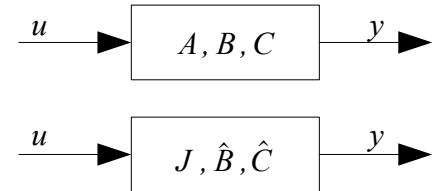
$$x(t) = Te^{Jt}T^{-1}x_0 + \int_0^t Te^{J(t-\tau)}T^{-1}Bu(\tau)d\tau$$

Ważna jest zależność:

$$e^{At} = Te^{Jt}T^{-1}$$

Wyjście $y(t)$ może być wyrażone wzorem:

$$y(t) = CT e^{Jt} T^{-1} x_0 + C \int_0^t T e^{J(t-\tau)} T^{-1} B u(\tau) d\tau$$



Rysunek 5.2: Działanie transformacji liniowej zmiennych stanu

Dzięki transformacji liniowej do innych zmiennych stanu można pozbyć się sprzężenia zwrotnego – rozsprężyć układ.

5.5 Impulsowa funkcja przejścia

Odpowiedź $y(t)$ systemu na specjalny sygnał sterujący będący impulsem Diraca $u(t) = a \cdot \delta(t)$ oznacza się

$$y(t) = a \cdot g(t)$$

Funkcja $g(t)$ nazywa się **impulsową funkcją przejścia** układu liniowego.

IMPULSOWA FUNKCJA PRZEJŚCIA TO:

1. ODPOWIEDŹ NA DELTĘ DIRACA
2. POCHODNA ODPOWIEDZI UKŁADU $h(t)$ NA SKOK JEDNOSTKOWY:

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt}$$

3. ORYGINAŁ TRANSMITANCJI $G(s)$, CZYLI ODWROTNA TRANSFORMATA LAPLACE'A TRANSMITANCJI:

$$Y(s) = G(s)U(s), U(s) = 1$$

$$Y(s) = G(s), y(t) = g(t)$$

5.6 Transmitancja a równania stanu

Transmitancja opisuje dynamikę toru **sterowanie-wyjście** (przy zerowych warunkach początkowych) nie wnikając w strukturę obiektu.

To samo wejście, to samo wyjście, inny środek.

Równanie stanu daje możliwość dokładnego opisu struktury, opisu dynamiki **stanu i wyjścia** oraz **ujęcia wpływu warunków początkowych**.

Dana transmitancja reprezentuje układ dwóch zbiorników:

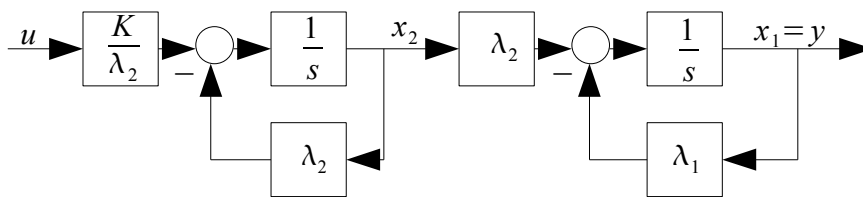
$$G(s) = \frac{K}{(s + \lambda_1)(s + \lambda_2)}$$

Mam nadzieję, że rysunki są dobrze, ale że były przerysowywane na szybko, to są odtwarzane trochę na zasadzie zgaduj-zgadula.

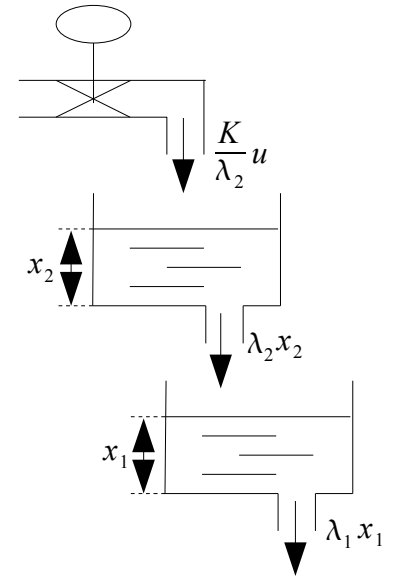
1. Modelowanie **poziomu** dwóch zbiorników połączonych szeregowo:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & \lambda_2 \\ 0 & -\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K}{\lambda_2} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$



Rysunek 5.4: Schemat blokowy dwóch zbiorników połączonych szeregowo

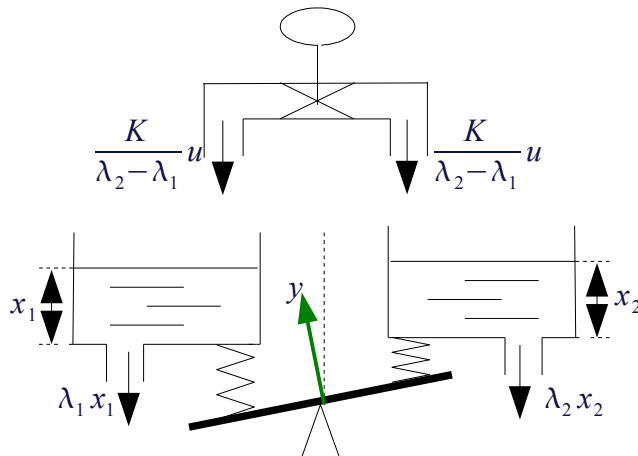


Rysunek 5.3: Zbiorniki połączone szeregowo

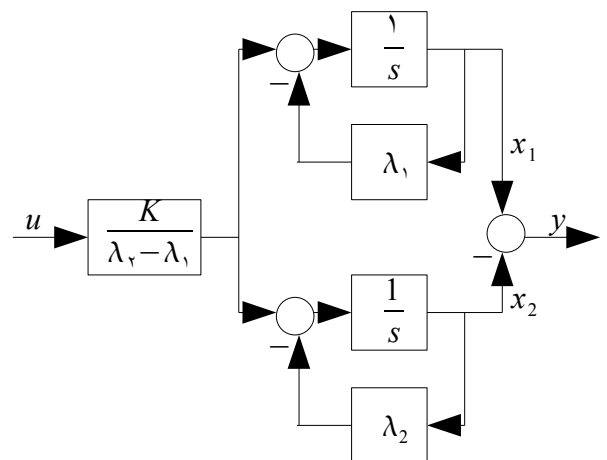
2. Modelowanie **różnicy poziomów** dwóch zbiorników połączonych równolegle:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K \\ K \end{bmatrix} \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$



Rysunek 5.6: Zbiorniki połączone równolegle

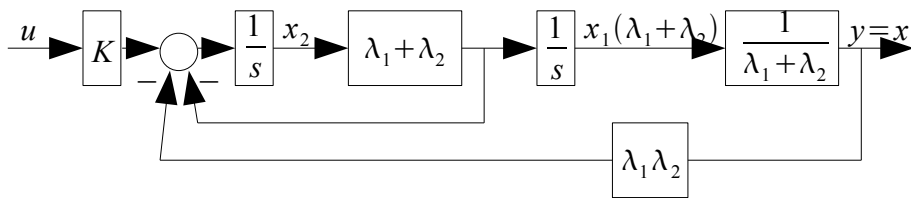


Rysunek 5.5: Schemat blokowy dwóch zbiorników połączonych równolegle

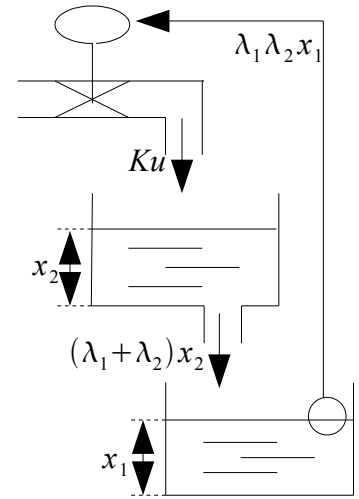
3. Modelowanie **poziomu** dwóch zbiorników połączonych szeregowo i sprzężeniem:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \lambda_1 + \lambda_2 \\ -\lambda_1 \cdot \lambda_2 & -\lambda_1 - \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$



Rysunek 5.7: Schemat blokowy zbiorników połączonych szeregowo ze sprzężeniem



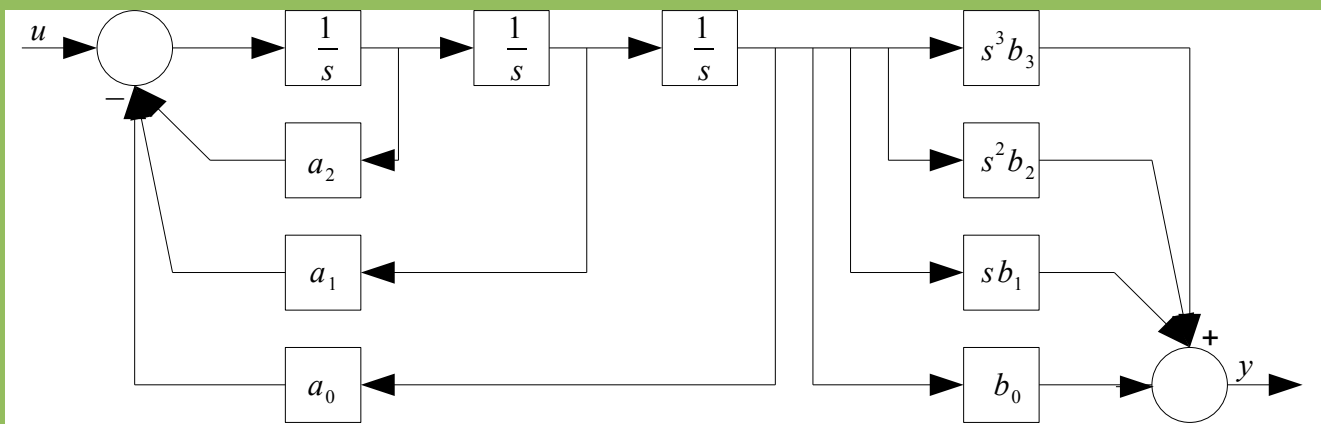
Rysunek 5.8: Zbiorniki połączone szeregowo ze sprzężeniem

5.7 Naturalne zmienne stanu

Układy liniowe n -tego rzędu opisywane transmitancją mogą być przedstawione w postaci schematów blokowych z wykorzystaniem tylko **członów całkujących I rzędu** i **członów wzmacniających**. Reprezentacja ta wprowadza pojęcie **naturalnych zmiennych stanu**, którymi mogą być kolejne pochodne zmiennej wejściowej.

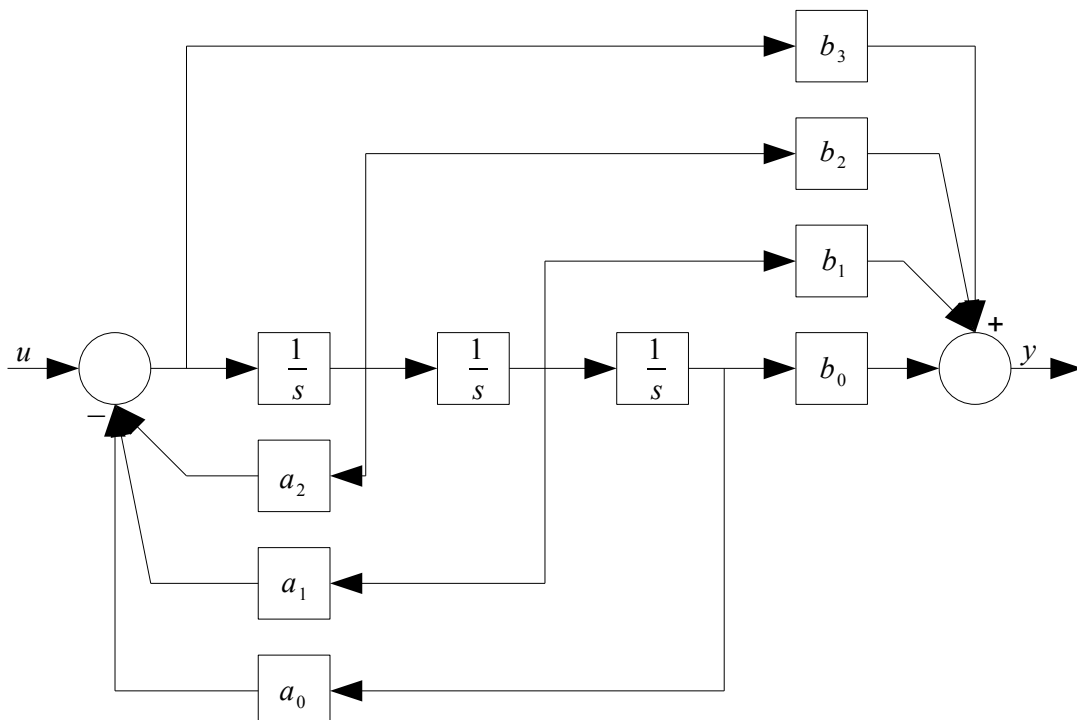
Dana jest transmitancja:

$$G(s) = \frac{b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{1}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} (b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0)$$



Rysunek 5.9: Schemat blokowy

W schemacie tym po przekształceniu występuje sprzężenie do tyłu i do przodu.



Rysunek 5.10: Schemat blokowy po przeniesieniu węzłów sumacyjnych

Wprowadzając wektor naturalnych zmiennych stanu $x(t) \in \mathbb{R}^3$, w którym składowymi są wyjścia z członów całkujących, otrzymuje się:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad \dot{x}_2(t) = x_3(t), \quad \dot{x}_3(t) = -a_0 x_1(t) - a_1 x_2(t) - a_2 x_3(t) + u(t)$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [b_0, b_1, b_2] x - [b_2 a_0, b_2 a_1, b_2 a_2] x + b_2 u = [b_0 - a_2 b_2, b_1 - a_1 b_2, b_2 - a_0 b_2] x + b_2 u$$

5.8 Równanie n -tego rzędu

Ogólne skalarne równanie n -tego rzędu na zmienną wyjściową $y(t)$ dla układu jednowymiarowego (SISO, *Single Input-Single Output*)

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_n u^{(n)}(t) + b_{n-1} u^{(n-1)}(t) + \dots + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t)$$

można zamienić na n równań różniczkowych I rzędu:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad y(t) \in \mathbb{R}, \quad u(t) \in \mathbb{R}$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

5.9 Postać sterowalna

Dla oznaczeń:

$$\gamma = [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n] = [b_0 - a_0 b_n, b_1 - a_1 b_n, \dots, b_{n-1} - a_{n-1} b_n]$$

$$b_n = 0 \Rightarrow \gamma = [b_0, b_1, \dots, b_{n-1}]$$

I postać sterowalna wygląda tak:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

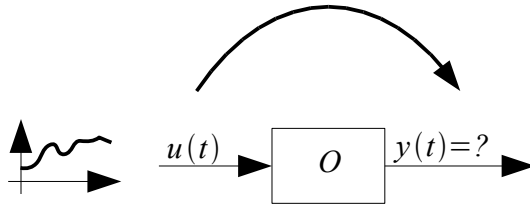
$$C = [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n], \quad D = b_n$$

6 Obiekt, sterowanie i wyjście. Struktury systemów sterowania.

6.1 Zadania automatyki

Zadanie **analizy** systemu dynamicznego, którym chcemy sterować:

- poznanie cech obiektu (poznanie modelu)
- poznanie reakcji układu na dane sterowanie

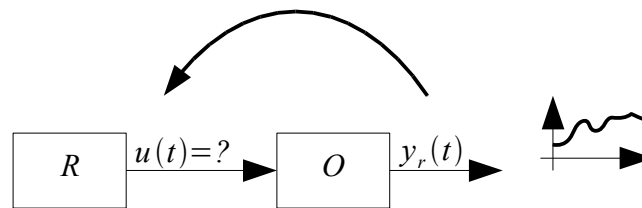


Rysunek 6.1: Ilustracja zadania analizy

Pierwsze trzy punkty są w dużej części odtwarzane z pamięci – notatki z wykładu mam szczerkawo, a nie mogę znaleźć tego w książce.

Zadanie **syntezy** systemu sterowania:

- otrzymanie pożądanego kształtu wyjścia
- znalezienie sterowania
- zaprojektowanie sterownika

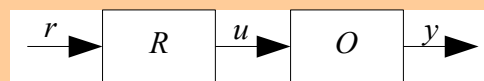


Rysunek 6.2: Ilustracja zadania syntezy

6.2 Sterowanie w układzie otwartym i układzie zamkniętym

OBIEKTEM **MOŻNA** STEROWAĆ W UKŁADZIE **OTWARTYM**, JEŚLI SPEŁNIONE SĄ **WSZYSTKIE** PONIŻSZE WARUNKI:

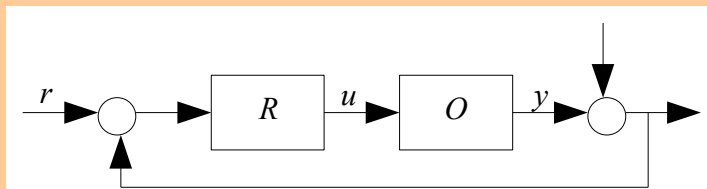
- OBIEKT JEST **STABILNY**
- OBIEKT JEST BARDZO DOBRZE **ZNANY**
- JEST GWARANCJA**, ŻE W CZASIE STEROWANIA NIE BĘDZIE ŻADNYCH ZAKŁÓCEŃ ZEWNĘTRZNYCH



Rysunek 6.3: Układ otwarty

OBIEKTEM **NALEŻY** STEROWAĆ W UKŁADZIE **ZAMKNIĘTYM**, GDY ZACHODZI **PRZYNAJMNIEJ JEDEN** Z PONIŻSZYCH WARUNKÓW:

- OBIEKT JEST **NIESTABILNY**
- OBIEKT JEST **SŁABO POZNANY**
- NIE MA GWARANCJI**, ŻE W CZASIE STEROWANIA NIE BĘDZIE ŻADNYCH ZAKŁÓCEŃ ZEWNĘTRZNYCH



Rysunek 6.4: Układ zamknięty

6.3 Zadania sterowania

Patrz [punkt 1.2](#). Tu trochę zmodyfikowane definicje:

- a) zadanie **nadążania** sygnału wyjściowego za zmieniającym się sygnałem referencyjnym
- b) zadanie **stabilizacji** sygnału wyjściowego y na poziomie referencyjnym r bez względu na działające zakłócenie z

W systemach dynamicznych „nie lubimy” stanów przejściowych.

6.4 Systemy automatyki procesowej i zabezpieczeniowej

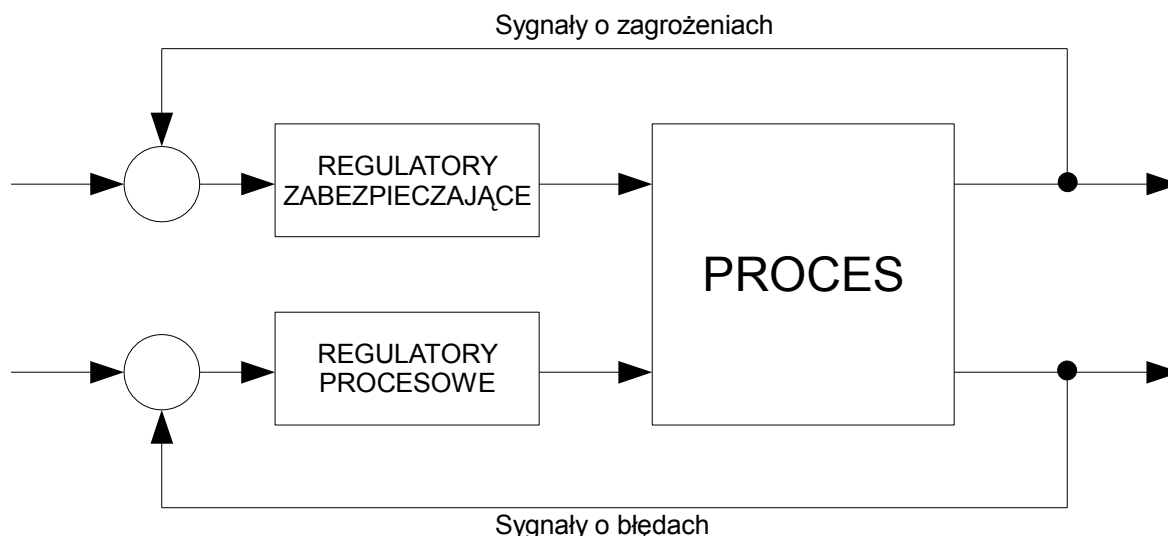
Kompleksowy system automatyki, sterujący instalacją technologiczną, obejmuje różne układy automatyki, które można podzielić na dwie grupy:

- a) układy automatyki procesowej DCS (*ang. Distributed Control Systems*)
- b) układy automatyki zabezpieczeniowej SIS (*ang. Safety Instrumented Systems*)

Układy DCS pracują z reguły w konfiguracji systemu sterowania nadrzędnego, którego zadaniem jest znalezienie optymalnego punktu pracy ustalonej dla instalacji, doprowadzenie instalacji do tego punktu i prowadzenie instalacji w pobliżu tego punktu, co ma gwarantować uzyskanie produktu o wymaganych normach, przy jednoczesnej wysokiej wydajności i oszczędności procesu.

Układy SIS mają za zadanie pilnowanie bezpiecznej odległości zmiennych procesowych od ich ograniczeń, co ma gwarantować pozostawanie punktu pracy w obszarze stabilności. Układy te są odpowiedzialne za rozpoznawanie zakłóceń najbardziej niebezpiecznych i sytuacji awaryjnych. Do ich zadań należy alarmowanie o przekroczeniu ograniczeń technicznych i technologicznych, wyłączanie zepsutych i włączanie zapasowych urządzeń pomiarowo-kontrolnych, zamykanie lokalnych niebezpiecznych cykli produkcyjnych, włączanie sekwencji blokad i awaryjne odstawianie instalacji.

Łączenie tych dwóch klas układów automatyki w jednych urządzeniach (np. w jednym sterowniku PLC – *ang. Programmable Logic Controllers*) jest zabronione, zwłaszcza dla procesów, w których występuje ryzyko katastrofalnej awarii. Międzynarodowe unormowania prawne zalecają dla instalacji przemysłowych rozdzielanie funkcji sterujących od funkcji zabezpieczeń.



Rysunek 6.5: Schemat rozdzielnych systemów DCS i SIS

6.5 Ogólny schemat układu regulacji ze sprzężeniem zwrotnym

r – wartość referencyjna dla regulatora (zadawana przez operatora)

ε – błąd regulacji

u – sterowanie generowane przez regulator

y – wyjście z obiektu (wielkość regulowana)

z_1 – zakłócenie sterowania

z_2 – zakłócenie wyjścia

z_3 – zakłócenie oddziałujące na parametry obiektu

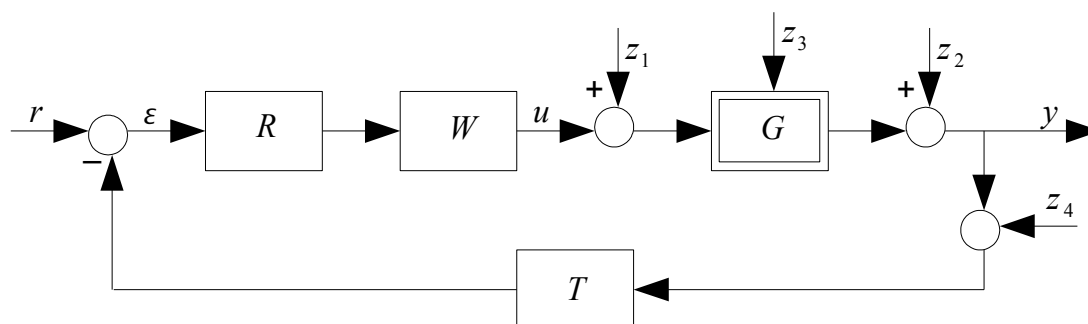
z_4 – szумы pomiarowe

R – regulator

W – człon wykonawczy (np. przetwornik, siłownik, zawór)

G – obiekt sterowania

T – tor pomiarowy (np. czujnik, przetwornik, transmisja)



Rysunek 6.6: miejsce zakłóceń w układzie regulacji

Dla zakłóceń z_1 i z_2 i $T(s)=1$ otrzymuje się transformatę sygnału wyjściowego $y(s)$:

$$y(s) = \frac{RWG}{1+RWG} r(s) + \frac{G}{1+RWG} z_1(s) + \frac{1}{1+RWG} z_2(s)$$

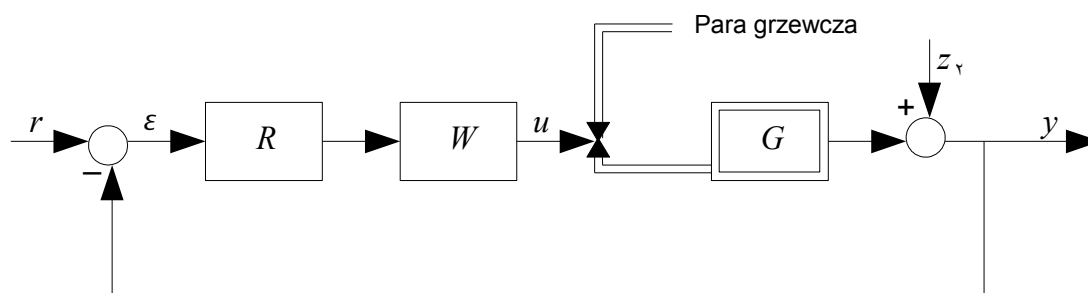
z której widać transmitancję toru nadążania i torów zakłóceń.

Klasyczny układ regulacji szybciej likwiduje wpływ zakłóceń znajdujących się bliżej wyjścia układu.

6.6 Przykładowe realizacje jednowymiarowych układów regulacji SISO

6.6.1 Układ klasyczny

Klasyczny układ stabilizacji sygnału wyjściowego y dla eliminacji wpływu zakłócenia z_2 ma postać:



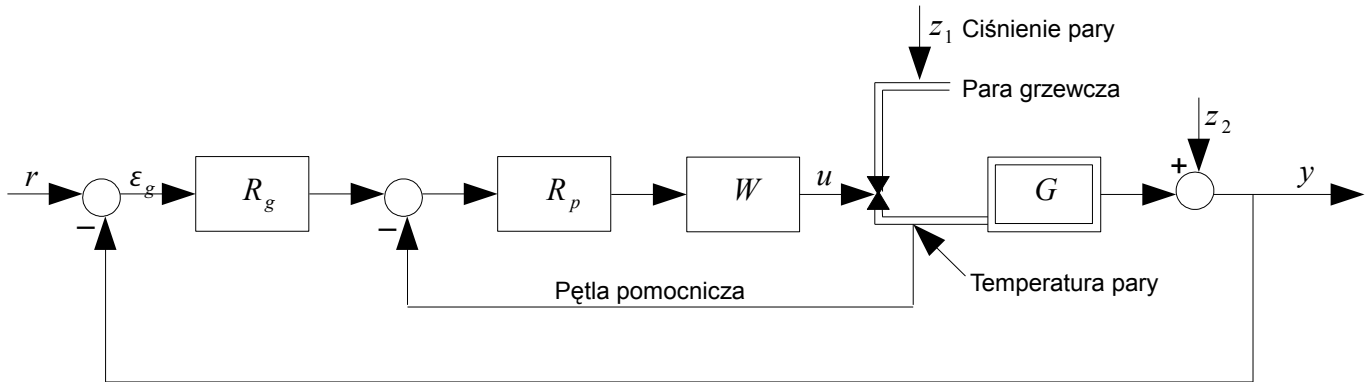
Rysunek 6.7: Schemat regulacji

Transformata wyjścia dana jest wzorem:

$$y(s) = \frac{RWG}{1+RWG}r(s) + \frac{1}{1+RWG}z_2(s)$$

6.6.2 Układ kaskadowy

Gdy oprócz zakłócenia z_2 występują duże zakłócenia z_1 zmiennej sterującej u , to w układzie klasycznym dodatkowo stosuje się układ dwuobwodowy – kaskadowy z regulatorem głównym i pomocniczym. Pomocnicza pętla sprzężenia zwrotnego o szybkiej dynamice (małej stałej czasowej) stabilizuje zmienną pomocniczą.



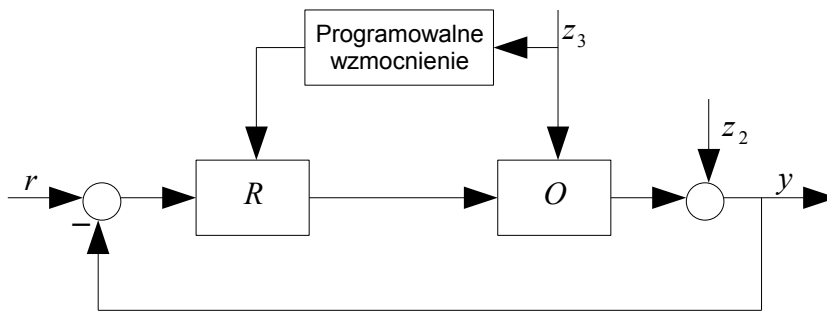
Rysunek 6.8: Schemat regulacji

6.6.3 Układ adaptacyjny

Regulatory dostosowujące na bieżąco swoje parametry do zmieniającego się układu nazywane są regulatorami **adaptacyjnymi**.

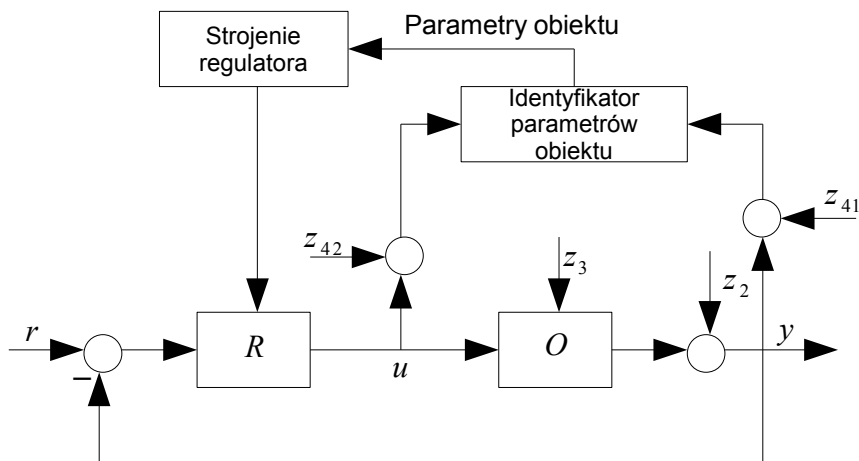
Rozróżnia się dwa typy układów adaptacyjnych:

- z_3 jest mierzalne – stosuje się układ adaptacji z pętlą otwartą i tzw. programowalnym wzmocnieniem (*ang. gain scheduling*), co ogólnie dotyczy programowalnych zmian parametrów regulatora

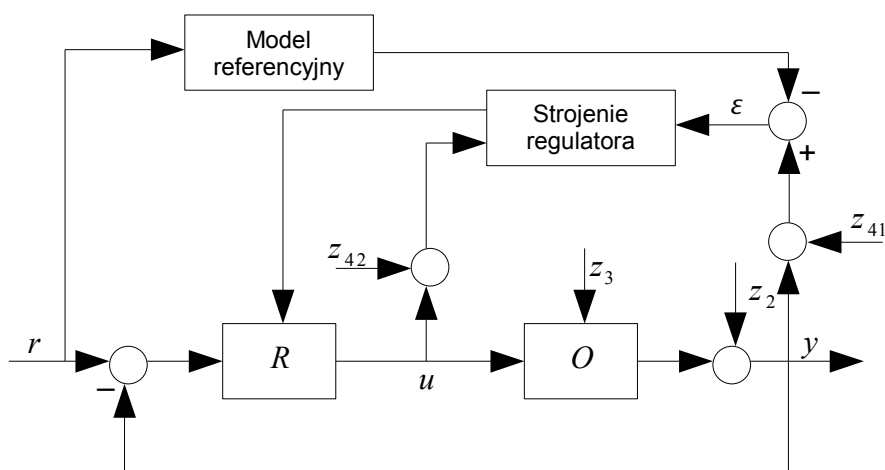


Rysunek 6.9: Schemat adaptacyjnego układu z programowalnym wzmocnieniem

- z_3 jest niemierzalne – stosuje się układ adaptacyjny z pętlą zamkniętą, tzw. układ samonastrajalnego regulatora STR (*ang. Self Tuning Regulator*)



Rysunek 6.10: Schemat pośredniej adaptacji z identyfikatorem

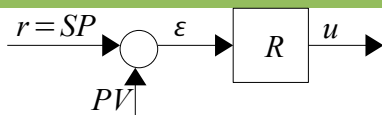


Rysunek 6.11: Schemat bezpośredniej adaptacji z modelem odniesienia

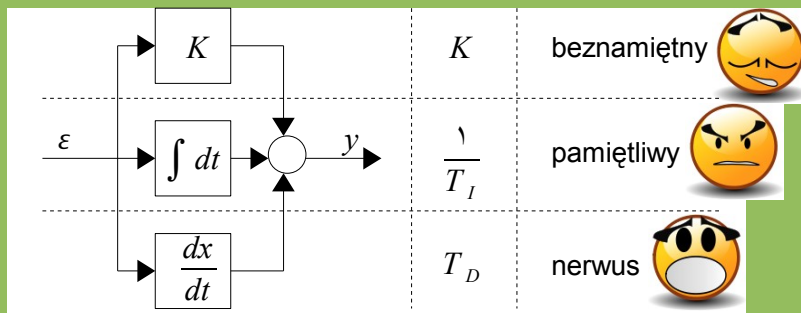
6.7 Algorytmy ciągłej regulacji PID

Do klasycznych algorytmów regulacji ciągłej należy liniowa kombinacja algorytmu proporcjonalnego, różniczkującego i całkującego.

Zastosowanie zasady, że **aktualna wielkość sterowania** generowana w danej chwili przez regulator jest **proporcjonalna do aktualnej wartości błędu, proporcjonalna do pola powierzchni błędu od momentu startu do chwili obecnej i proporcjonalna do aktualnej pochodnej błędu**, dało na tyle dobre rezultaty, że powyższy algorytm w postaci sumy ważonej trzech równoległych akcji zastosowany w pierwszych przemysłowych regulatorach mechaniczno-pneumatycznych z lat 30. XX w. przetrwał do dziś i znajduje zastosowanie w cyfrowych regulatorach PLC.



Rysunek 6.12: Generowanie sterowania



Rysunek 6.13: Liniowa kombinacja algorytmów regulacji

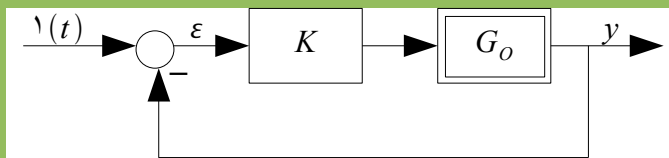
6.7.1 Regulator proporcjonalny P

$$G_R(s) = K$$

$$u(t) = K \varepsilon(t)$$

K – współczynnik proporcjonalności

$\frac{\lambda}{K} \cdot 100\%$ – zakres proporcjonalności

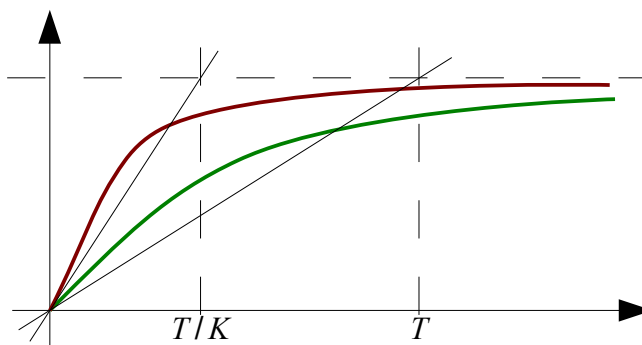


Rysunek 6.14: Schemat regulacji

$$G_o = \frac{1}{Ts+1} \quad G_R(s) = K$$

$$G_Z(s) = \frac{K}{Ts+1+K} \approx \frac{\lambda}{(T/K)s+1}$$

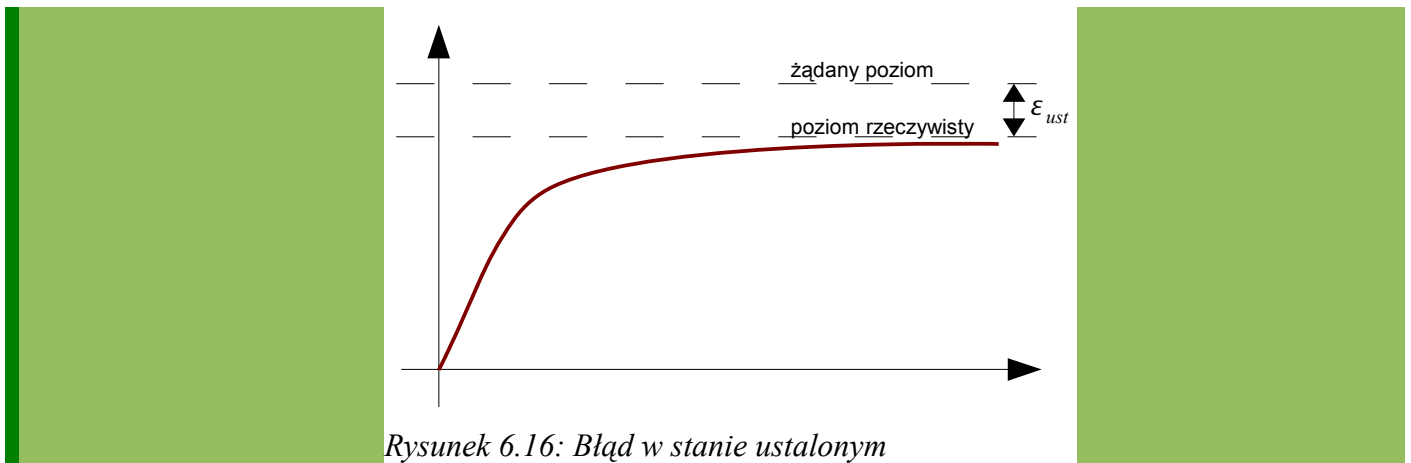
Dla dużych K , stała czasowa układu zamkniętego T/K jest K razy mniejsza niż stała czasowa układu otwartego. W tym sensie odpowiedź $y(t)$ układu zamkniętego jest K razy szybsza.



Rysunek 6.15: Porównanie odpowiedzi układu otwartego i układu ze sprzężeniem zwrotnym

Regulatory proporcjonalne mogą pozostawiać błąd w stanie ustalonym ε_{ust} . Jest to błąd statyczny, zerujący się dla $K = \infty$. Dla skończonych K , $y(\infty) = \frac{K}{K+1}$.

Oprócz tego jest także błąd przejściowy $\varepsilon_p(t)$. Jest to człon zanikający (dynamiczny). Ogólnie przebieg błędu regulacji można zapisać jako $\varepsilon(t) = \varepsilon_{ust} + \varepsilon_p(t)$.



Rysunek 6.16: Błąd w stanie ustalonym

6.7.2 Regulator proporcjonalno-różniczkujący PD

$$G_R(s) = K(1 + T_D s)$$

$$u(t) = K \varepsilon(t) + T_D \frac{d\varepsilon(t)}{dt}$$

T_D – stała czasowa różniczkowania (czas wyprzedzenia)

6.7.3 Regulator proporcjonalno-całkujący PI

$$G_R(s) = K \left(1 + \frac{1}{T_I s} \right) = K + \frac{\alpha}{s}$$

$$u(t) = K \varepsilon(t) + \alpha \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau$$

T_I – stała czasowa całkowania (czas zdwojenia – czas, po którym sygnał z regulatora w odpowiedzi na skok jednostkowy będzie dwa razy większy niż sygnał z regulatora proporcjonalnego)

6.7.4 Regulator proporcjonalno-całkująco-różniczkujący PID (idealny)

PID-ISA – wzmacnienie K dotyczy wszystkich torów

$$G_R(s) = K \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right)$$

PID-IND – indywidualne wzmacnienie torów

$$G_R(s) = K + \frac{\alpha}{s} + \beta s = \frac{\beta s^2 + K s + \alpha}{s}$$

$$u(t) = K \varepsilon(t) + \alpha \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau + \beta \frac{d\varepsilon(t)}{dt}$$

6.7.5 Regulator proporcjonalno-całkująco-różniczkujący PID z inercją (rzeczywisty)

$$G_R(s) = K \left(1 + \frac{1}{T_I s} + \frac{T_D s}{T_S + 1} \right) = K + \frac{\alpha}{s} + \frac{\beta s}{T_S + 1}, \quad T \ll T_D$$

7 Algorytmy dyskretne regulatorów PID. Stabilność

7.1 Algorytmy dyskretne regulatora PID

Sygnałem wejściowym do algorytmu regulatora jest sygnał błędu $e(t)$, a sygnałem wyjściowym – sygnał sterowania $u(t)$.

W cyfrowych wersjach regulatorów właściwym opisem algorytmu jest równanie różnicowe o postaci:

$$u_k + a_1 u_{k-1} + a_2 u_{k-2} + \dots + a_n u_{k-n} = b_0 e_k + b_1 e_{k-1} + \dots + b_m e_{k-m}$$

Poniżej rozważone będą trzy wersje dyskretne ciągłego równania regulatora PID:

$$u(t) = K \left[e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt} \right]$$

gdzie:

K – współczynnik wzmacnienia regulatora

T_I – czas całkowania

T_d – stała różniczkowania

T – okres próbkowania

7.2 Reguła całkowania prostokątów (forward)

$$u_k = K \left[e_k + \frac{T}{T_I} \sum_{i=0}^{k-1} e_i + \frac{T_d}{T} [e_k - e_{k-1}] \right]$$

Reguła ta pozwala policzyć u_k od razu dla dowolnego k , przy czym zapamiętany jest przebieg błędów e_i w przedziale $[0, k-1]$. Algorytm powyższy zwany jest algorytmem **pozycyjnym**.

ALGORYTM PRZYROSTOWY (PRĘDKOŚCIOWY) WYKORZYSTUJE POLICZONĄ W CHWILI POPRZEDNIEJ WARTOŚĆ STEROWANIA u_{k-1} I TRZY OSTATNIE PRÓBKI POMIAROWE BŁĘDU:

$$u_k = u_{k-1} + b_0 e_k + b_1 e_{k-1} + b_2 e_{k-2}$$

gdzie:

$$b_0 = K \left(1 + \frac{T_d}{T} \right)$$

$$b_1 = -K \left(1 + 2 \frac{T_d}{T} - \frac{T}{T_I} \right)$$

$$b_2 = K \frac{T_d}{T}$$

7.3 Aproksymacja wsteczna (backward)

Ogólny wzór jest ten sam, zmieniają się tylko współczynniki b :

$$b_0 = K \left(1 + \frac{T_d}{T} + \frac{T}{T_I} \right)$$

$$b_1 = K \left(1 + 2 \frac{T_d}{T} \right)$$

$$b_2 = K \frac{T_d}{T}$$

7.4 Reguła całkowania trapezów

Ogólny wzór jest ten sam, zmieniają się tylko współczynniki b :

$$b_0 = K \left(1 + \frac{T}{2T_I} + \frac{T_d}{T} \right)$$

$$b_1 = -K \left(1 + 2 \frac{T_d}{T} - \frac{T}{2T_I} \right)$$

$$b_2 = K \frac{T_d}{T}$$

7.5 Transmitancja w przypadku ogólnym

We wszystkich powyższych przypadkach transmitancja dyskretna PID wyrażana jest wzorem:

$$G(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}}$$

Co jeszcze ogólniej można zapisać:

$$G(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}}{1 - z^{-1}}$$

Dla różnych m otrzymuje się różne regulatory: $m=0$ - P, $m=1$ - PI, $m=2$ - PID, $m=3$ - PIDD, ... Są one opisane równaniem różnicowym:

$$u_k = u_{k-1} + b_0 e_k + b_1 e_{k-1} + \dots + b_m e_{k-m}$$

Biorąc pod uwagę efekt inercji w praktycznych realizacjach członu różniczkującego dyskretna i dokładna transmitancja regulatora PID (z uwzględnieniem członu podtrzymującego ZOH) ma postać:

$$G_R(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 - a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

gdzie:

$$b_0 = K \left[1 + \frac{T_d}{\hat{T}_d} \right]$$

$$b_1 = -K \left[1 - \gamma + 2 \frac{T_d}{\hat{T}_d} - \frac{T}{T_I} \right]$$

$$b_2 = K \left[\frac{T_d}{\hat{T}_d} + \left(\frac{T}{T_I} - 1 \right) \gamma \right]$$

$$\gamma = -e^{-\frac{T}{T_I}}$$

$$a_1 = \gamma - 1$$

$$a_2 = -\gamma$$

zwykle przyjmuje się $\frac{T_d}{\hat{T}_d} \in [0.5 \div 1.0]$

równanie różniczkowe przyjmuje wtedy postać:

$$u_k = (\gamma - 1)u_{k-1} + \gamma u_{k-\gamma} + b_0 e_k + b_1 e_{k-1} + b_2 e_{k-2} = -u_{k-1} - \gamma(u_{k-1} + u_{k-\gamma}) + b_0 e_k + b_1 e_{k-1} + b_2 e_{k-2}$$

Główna różnica pomiędzy równaniami ciągłymi a dyskretnymi jest taka, że w ciągłych obie strony zgadzają się **bez przerwy**:

$$\ddot{y}(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t)$$

Równania dyskretnie zachowują równość tylko dla danych momentów, „włóka za sobą pamięć”:

$$y_k + \bar{a}_1 y_{k-1} + \bar{a}_0 y_{k-2} = \bar{b}_0 u_k$$

„Jeżeli czegoś nie potrafię zmierzyć, to to nie istnieje”.

T – okres pomiędzy próbkami

$$\bar{a}_i = f(a_i, T)$$

7.6 Regulatory przekaźnikowe stosowane w układzie regulacji

W prostych układach regulacji jednym z częściej używanych regulatorów **nieliniowych** są przekaźniki. Wykorzystywane są w termostatach urządzeń grzewczych i chłodzących. Precyzja stabilizacji nie jest wysoka i często pojawia się cykl graniczny, tzn. wartość zmiennej wyjściowej oscyluje mniej lub bardziej dokładnie wokół wartości średniej. Obecność naturalnych zbiorników i pojemności cieplnych (członów całkujących) pracujących jak filtr dolnoprzepustowy powoduje zmniejszenie amplitudy tych oscylacji. Przebiegi uzależnione są od typu zastosowanego przekaźnika. Poniższy przykład pokazuje, jak obecność histerezy wpływa niekorzystnie na proces stabilizacji powodując lokalną niestabilność przebiegu.

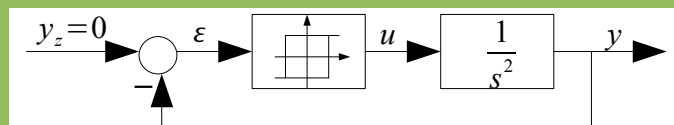
W ujemnym sprzężeniu zwrotnym zastosowany zostanie przekaźnik z histerezą (strefa $\pm a$).

Krzywą przełączania tego przekaźnika na płaszczyźnie fazowej $\left[\varepsilon, \frac{d\varepsilon}{dt} \right]$, uzyskuje się analizując obszary, w których wyjściem przekaźnika jest sygnał dodatni i ujemny.

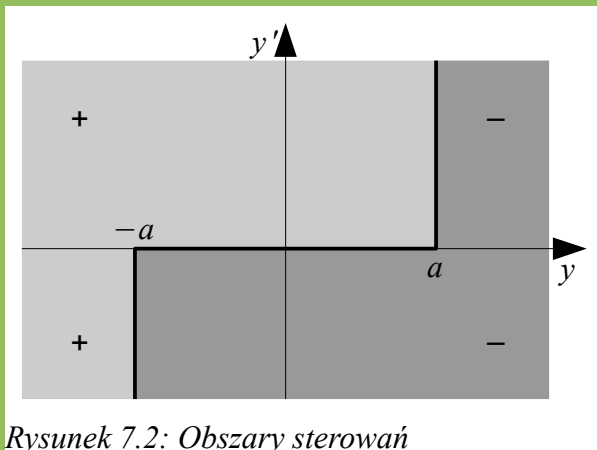
Krzywa przełączania daje nam pełną informację o efektach zastosowania przekaźnika w

układzie sterowania ze sprzężeniem zwrotnym. Ponieważ $\varepsilon = -y$, a $\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{dy}{dt}$, to krzywą

przełączania można też przedstawić we współrzędnych „fazowych” $\left[y, \frac{dy}{dt} \right]$ z odwróceniem obszarów sterowań.

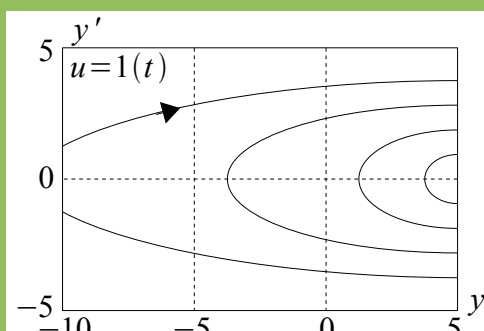


Rysunek 7.1: Układ regulacji

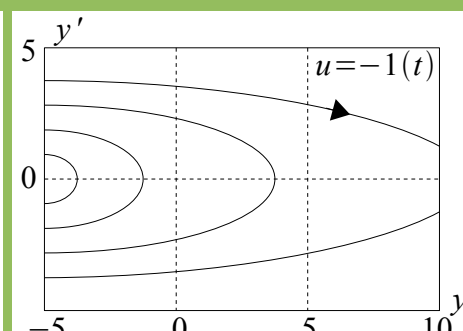


Rysunek 7.2: Obszary sterowań

Dla założonego obiektu podwójnie całkującego, jego trajektorie fazowe tworzą dla sterowań dodatnich i ujemnych $u = \pm M \cdot 1(t)$ dwie rodziny krzywych parabolicznych.

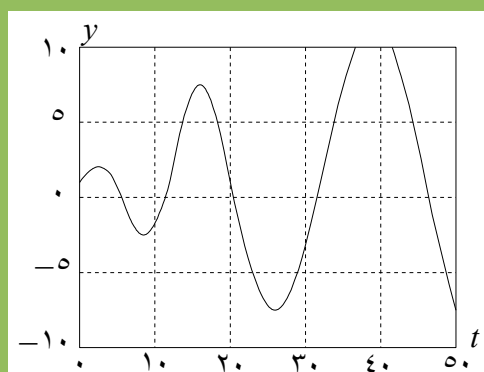


Rysunek 7.3: Rodzina trajektorii dla sterowań $+M$

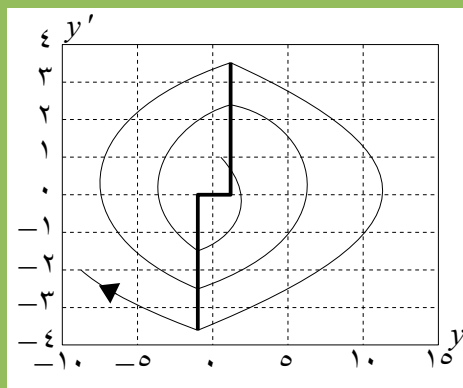


Rysunek 7.4: Rodzina trajektorii dla sterowań $-M$

Przebieg czasowy odpowiedzi $y(t)$ układu zamkniętego z takim przekaźnikiem jest przedstawione poniżej:



Rysunek 7.5: Przebieg czasowy



Rysunek 7.6: Przebieg na płaszczyźnie fazowej

Kształt trajektorii fazowej wynika ze złożenia dwóch rodzin trajektorii dla sterowań $u = \pm 1$ z rysunków 7.3 i 7.4 oraz krzywej przełączania jak na rysunku 7.1. Widać, że przebieg rozwiązania w układzie zamkniętym rozbiega się.

7.7 Stabilność

Przez stabilność systemu rozumiemy zdolność tego systemu do utrzymania swojej pozycji w aktualnym punkcie równowagi.

Stabilność dynamicznych układów liniowych ciągłych zależy od:

- warunków początkowych
- sterowania

7.8 Stabilność w sensie Lapunowa

Stabilność w sensie Lapunowa jest stabilnością względem warunków początkowych.

Równanie opisujące dynamikę stanu swobodnego układu liniowego (**bez sterowania**) ma postać:

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(0) = x_0 \neq 0$$

$$x(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]^T \in \mathbb{R}^n, \quad \forall t \geq 0$$

Jego rozwiązaniem jest:

$$x(t) = e^{At} x_0$$

Mówimy, że taki układ jest stabilny w sensie Lapunowa, jeśli dla dowolnych warunków początkowych x_0 , każda składowa jego rozwiązania $x(t)$ dąży do zera lub przynajmniej nie narasta dla $t > \cdot$.

Układ liniowy, stacjonarny $\dot{x} = Ax$ jest **stabilny globalnie** (dla dowolnych warunków początkowych) wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie wartości własne macierzy A mają ujemne części rzeczywiste, a każda wartość własna o zerowej części rzeczywistej jest pierwiastkiem jednokrotnym wielomianu minimalnego macierzy A .

UKŁAD LINIOWY, STACJONARNY $\dot{x} = Ax$ JEST GLOBALNIE ASYMPTOTYCZNIE STABILNY WTEDY I TYLKO WTEDY, GDY WSZYSTKIE WARTOŚCI WŁASNE MACIERZY A MAJĄ UJEMNE CZĘŚCI RZECZYWISTE.

7.9 Stabilność w sensie „ograniczone wejście – ograniczone wyjście” (BIBO)

Skrót BIBO oznacza Bounded Input – Bounded Output. Pytanie o stabilność w sensie BIBO jest pytaniem o warunki gwarantujące uzyskanie ograniczonej odpowiedzi wyjścia y układu liniowego na każdy ograniczony sygnał sterujący u .

Za tak zdefiniowaną stabilność **przy zerowych warunkach początkowych** odpowiedzialna będzie struktura toru sterowania, która może być przedstawiona transmitancją lub równaniem wyjścia.

Z równania stanu i wyjścia wynika postać jego rozwiązania na $y(t)$:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \Rightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C[sI - A]^{-1} B$$

$$y(t) = \int_0^t C e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau = \int_0^t g(t-\tau) u(\tau) d\tau$$

Widać, że za uproszczenia w transmitancji i za znikanie narastających niestabilnych modów macierzy e^{At} w macierzy impulsowej funkcji przejścia $g(t) = C e^{At} B$ odpowiedzialne są dodatkowo macierze B i C .

7.10 Stabilność w sensie Lapunowa a stabilność w sensie BIBO

Dla układów liniowych można podać trzy poniższe stwierdzenia:

1. Każdy układ stabilny asymptotycznie w sensie Lapunowa jest stabilny w sensie BIBO
2. Układy stabilne nieasymptotycznie w sensie Lapunowa mogą być:
 - a) niestabilne w sensie BIBO, np.:

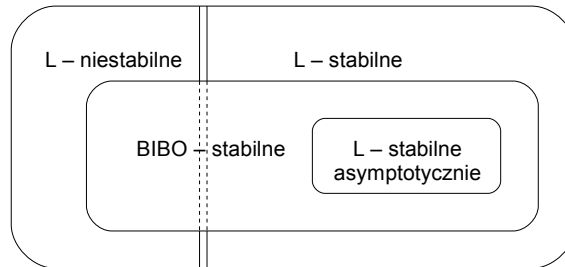
- człon całkujący $G(s) = \frac{1}{s}$, stabilny w sensie Lapunowa – daje odpowiedź narastającą na skok jednostkowy
- oscylator harmoniczny $G(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$, stabilny w sensie Lapunowa – wykazuje nieskończone wzmocnienie dla ograniczonego sygnału sinusoidalnego o

częstotliwości rezonansowej

b) stabilne w sensie BIBO

- układ $G(s) = \frac{s}{s^2 + s}$

3. Układ stabilny w sensie BIBO nie musi być stabilny w sensie Lapunowa



Rysunek 7.7: Przenikanie się różnych typów stabilności

8 Kryteria oceny stabilności. Systemy nieliniowe

8.1 Kryterium Hurwitza

Dany jest wielomian zmiennej s (wielomian charakterystyczny macierzy A lub mianownik transmitancji):

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$$

Warunkiem **koniecznym** stabilności (ujemności części rzeczywistych pierwiastków) jest, aby **wszystkie współczynniki** a_i były niezerowe i posiadały ten sam znak.

Warunkiem **koniecznym i wystarczającym** stabilności asymptotycznej jest, aby w wyznaczniku Hurwitza wyznacznik główny i każdy jego podwyznacznik były dodatnie.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_n & a_{n-1} \end{vmatrix}_{(n-1) \times (n-1)}$$

Podać zakres zmienności parametrów regulatora PD, aby zapewnić stabilność układu i jednocześnie błąd w stanie ustalonym $\varepsilon_u \leq 1 \cdot \% \cdot y(\infty)$, przy wymuszeniu skokowymi obiekcie o transmitancji:

$$G_O(s) = \frac{1}{s^2 + \lambda \cdot s + 1}, \quad G_R(s) = \alpha + \beta s$$

Transmitancja układu zamkniętego:

$$G_Z(s) = \frac{G_R G_O}{1 + G_R G_O} = \frac{\alpha + \beta s}{s^3 + 8.5s^2 + (1 + \beta)s + 1 + \alpha}$$

Przy założeniu $\alpha > 0$, $\beta > 0$, dla układu zamkniętego otrzymuje się warunki:

$$\begin{vmatrix} 1 + \beta & 1 + \alpha \\ 1 & \lambda \cdot s \end{vmatrix} > 0$$

$$1 + \beta > 0 \Rightarrow \beta > -1$$

$$\lambda \cdot s + \lambda \cdot s \beta - \alpha > 0 \Rightarrow \beta > \frac{\alpha - \lambda \cdot s}{\lambda \cdot s}$$

Analiza błędu prowadzi do wzorów:

$$\varepsilon(t) = 1(t) - y(t), \text{ więc dla } t \rightarrow \infty, \varepsilon_u = 1 - y(\infty)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \frac{\alpha}{1 + \alpha}$$

$$\varepsilon_u = 1 - y(\infty) = 1 - \frac{\alpha}{1 + \alpha} = \frac{1}{1 + \alpha} - \text{jeśli } \alpha \text{ rośnie, to błąd } \varepsilon_u \text{ maleje}$$

$$\varepsilon_u = \frac{1}{1 + \alpha} \leq 0.1 \cdot y(\infty) = 0.1 \frac{\alpha}{1 + \alpha} \Rightarrow \alpha \geq 10$$

Teraz należy jeszcze dobrać β .

8.2 Kryterium Nyquista

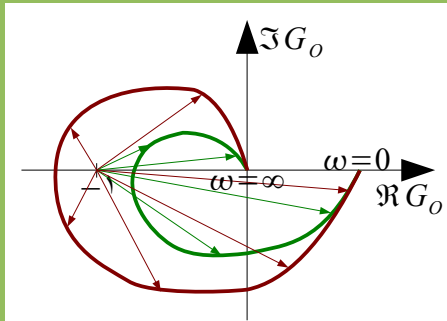
Kryterium Nyquista pozwala ocenić stabilność układu **zamkniętego** na podstawie amplitudowo-fazowego wykresy transmitancji układu **otwartego** $G_O = G_1 G_2$. Nie trzeba specjalnie analizować

mianownika transmitancji zastępczej układu zamkniętego $G_z = \frac{G_1}{1+G_1G_2}$.

1. Jeżeli układ **otwarty** jest **stabilny** i przyrost argumentu (Δarg) transmitancji otwartej $G_o(j\omega)$ liczony na płaszczyźnie zespolonej od $\omega=0$ do $\omega=\infty$ widziany z punktu $(-1,0)$ jest równy zero, to układ **zamknięty** będzie też **stabilny** (wykres nie obejmuje punktu $(-1,0)$).

Jeżeli $\Delta arg=0$ – układ po zamknięciu będzie dalej stabilny

Jeżeli np. $\Delta arg=2\pi$ – układ po zamknięciu będzie niestabilny



Rysunek 8.1: Przyrost argumentu w kryterium Nyquista

$$u(t) = A \sin(\omega t)$$

$$y(t) = |G(j\omega)| A \sin(\omega t + \phi)$$

$$G(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$$

2. Jeżeli układ otwarty jest niestabilny (tzn. mianownik $G_o(j\omega)$ ma m pierwiastków z prawej strony płaszczyzny), to układ zamknięty jednostkowym sprzężeniem zwrotnym jest stabilny, jeżeli przyrost argumentu $\Delta arg = m\pi = \frac{m}{2} 2\pi$ (wykres okrąży punkt $(-1,0)$ $\frac{m}{2}$ razy w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara), przy zmianie ω od 0 do ∞ .
3. Jeżeli w transmitancji występują bieguny zerowe i wykres amplitudowo-fazowy dla $\omega=0$ ma punkt nieciągłości tzn. $\Im G_o(0) = \pm\infty$ lub $\Re G_o(0) = \pm\infty$, należy hipotetycznie uzupełnić ten wykres łukiem o promieniu nieskończonym, sięgającym $\Re G = \infty$ i traktować ten punkt jako formalny początek wykresu $\Re G_o(\cdot)$.

8.3 Stabilność układów liniowych dyskretnych

Liniowy swobodny układ dyskretny:

$$x_{k+1} = A_D x_k, \quad x_0 \neq 0, \quad x_k \in \mathbb{R}^n, \quad \forall k \geq 0$$

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix}$$

nazywamy asymptotycznie stabilnym (w sensie Lapunowa), gdy dyskretne wartości odpowiedzi swobodnej maleją do zera dla $k \rightarrow \infty$.

Warunkiem koniecznym i wystarczającym asymptotycznej stabilności układu liniowego, stacjonarnego, dyskretnego jest, aby wszystkie **pierwiastki równania charakterystycznego** macierzy stanu A_D leżały wewnątrz koła jednostkowego:

$$|z_i| < 1 \quad \text{dla } i=1, \dots, n$$

System będzie stabilny, jeśli na okręgu jednostkowym będą leżały tylko jednokrotne pierwiastki wielomiany minimalnego. Pierwiastki te można wyliczyć z wyznacznika macierzy charakterystycznej:

$$|zI - A_D| = 0$$

Dla udowodnienia twierdzenia stosuje się liniowe przekształcenie stanu sprowadzające macierz A_D do jej postaci diagonalnej Jordana poprzez nieosobliwą macierz kwadratową T :

$$x_k = T \hat{x}_k, \quad T \hat{x}_{k+1} = A_D T \hat{x}_k, \quad \hat{x}_{k+1} = T^{-1} A_D T \hat{x}_k$$

$$\hat{x}_{k+1} = J_D \hat{x}_k = \begin{bmatrix} z_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & z_n \end{bmatrix} \hat{x}_k$$

Rozwiązanie powyższego równania ma postać:

$$\hat{x}_k = J_D^k \hat{x}_0 = \begin{bmatrix} z_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z_2^k & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & z_n^k \end{bmatrix} \hat{x}_0$$

$$x_k = A_D^k x_0 = T J_D^k T^{-1} x_0$$

Widać, że rozwiązanie dla wszystkich składowych stany i dla dowolnych warunków początkowych będzie dążyło do zera tylko wtedy, gdy wartości własne z_i będą ułamekami (ogólnie ich moduł będzie mniejszy od 1). Dla przypadku granicznego $|z_i|=1$ i pojedynczych wartości własnych układ będzie pozostawał na granicy stabilności.

8.4 Przekształcenie w

Przekształcenie geometryczne w przekształca okrąg jednostkowy na płaszczyźnie z w lewą półpłaszczyznę na płaszczyźnie w . Do tak przekształconego równania można stosować znane kryteria dla układ ciągłych.

$$z = \frac{w+1}{w-1}$$

Dany jest wielomian charakterystyczny:

$$M(z) = a_k z^k + a_{k-1} z^{k-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$$

i dwie liczby zespolone: $w = \alpha + j\beta$, $z = \gamma + j\delta$.

Po zastosowaniu przekształcenia w , $z = \frac{w+1}{w-1}$, otrzymuje się:

$$N(w) = b_k w^k + b_{k-1} w^{k-1} + \dots + b_1 w + b_0 = 0$$

Dla wielomianu $N(w)$ można już stosować znane kryteria stabilności układów ciągłych.

8.5 Stabilność układów nieliniowych ciągłych

Dla układów nieliniowych ciągłych analiza stabilności dotyczy stabilności wybranego rozwiązania równania ciągłego. Badanie stabilności układu będzie dotyczyło tylko wybranych rozwiązań. Te rozwiązania to tzw. punkty równowagi systemu.

Dla stabilności rozwiązania względem zmian warunków początkowych dany jest system nieliniowy opisany wektorowym równaniem różniczkowym nieliniowym:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t)$$

$$x(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)] \in \mathbb{R}^n$$

$\hat{x}(t)$ – rozwiązanie, $\hat{x}(t_0) = \hat{x}$.

8.6 Punkty równowagi

Punkt równowagi to rozwiązanie, które dla wszystkich czasów $t \geq \cdot$ wykazuje wartość ustaloną $\hat{x}(t) = const$, czyli jego pochodna się zeruje, $\dot{\hat{x}}(t) = 0$ dla $\forall t \geq \cdot$.

Dane jest równanie nieliniowe Lotki-Volterra:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t)x_2(t) - \frac{3}{2}x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = [x_2(t)+2] \cdot [2x_1(t) - x_2(t)] \end{cases}$$

Punktami równowagi są trzy punkty płaszczyzny fazowej, wynikające z równań:

$$-x_1x_2 - \frac{3}{2}x_2 = 0, \quad (x_2+2)(2x_1 - x_2) = 0$$

$$x_{1r} = \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}, \quad x_{2r} = \begin{cases} x_1 = -1.5 \\ x_2 = -3 \end{cases}, \quad x_{3r} = \begin{cases} x_1 = -1.5 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

System nieliniowy może nie mieć, mieć jeden, wiele lub nieskończenie wiele punktów równowagi. Trzeba sprawdzić stabilność interesującego nas punktu równowagi.

8.7 Pierwsza metoda Lapunowa

Pierwsza metoda Lapunowa oceny stabilności względem warunków początkowych polega na linearyzacji układu nieliniowego wokół wybranego punktu równowagi x_r i ocenie stabilności tak uzyskanego modelu liniowego.

Dany jest układ nieliniowy i jego punkty równowagi:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t) \Rightarrow x_r$$

Do równania wprowadzamy zmienne odchyłkowe Δx , oznaczamy $x(t) = x_r + \Delta x(t)$ oraz rozwijamy prawą stronę w szereg Taylora wokół punktu równowagi. Po pominięciu wyrazów wyższych od pierwszego stopnia otrzymujemy:

$$\Delta \dot{x}(t) = f(x_r) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_r} \Delta x + \dots$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = J(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Biorąc po uwagę zależność $f(x_r) = 0$, otrzymuje się znaną liniową postać równania stanu:

$$\Delta \dot{x}(t) = J \Delta x(t)$$

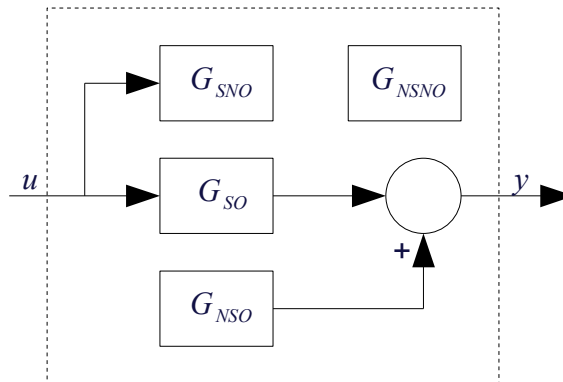
Warunek wystarczający stabilności modelu nieliniowego (twierdzenie Lapunowa):

- Jeżeli model liniowy otrzymany po linearyzacji wokół wybranego punktu równowagi x_r jest **asymptotycznie stabilny**, to model nieliniowy będzie również **asymptotycznie stabilny** wokół tego punktu w sensie Lapunowa.
- Jeżeli model liniowy jest niestabilny, to rozwiązanie zerowe układu nieliniowego jest też niestabilne.
- Jeżeli model liniowy jest tylko stabilny, o nic o stabilności punktu x_r dla modelu nieliniowego nie można powiedzieć.

9 Sterowalność i obserwowalność

9.1 Sterowalność

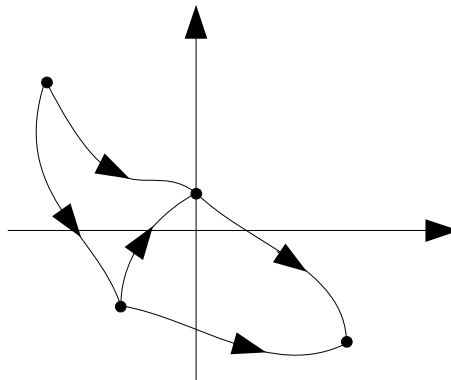
Oprócz cechy stabilności dla obiektu sterowania definiuje się pojęcia sterowalności i obserwowalności. Teoretycznie w każdym systemie którym sterujemy można wyróżnić cztery bloki, Nie wszystkie jednak muszą wystąpić.



Rysunek 9.1: Schemat systemu

Sterowalność = możliwość oddziaływania na system

Sterowalność wektora stanu wiąże się z możliwością przeprowadzenia stanu z dowolnego punktu przestrzeni stanu w dowolny inny punkt w skończonym czasie.



Rysunek 9.2: Sterowalność

Dla ciągłych układów liniowych badanie sterowalności stanu $x_0(t_0)$ do wszystkich innych stanów można sprowadzić do badania sterowalności tylko do stanu zerowego $x_1(t_1)=0$. Wtedy stan $x_0(t_0)$ będzie też sterowalny do innych stanów.

Nierozdzielność wektora stanu wiąże się z niemożliwością znalezienia sterowania, które przeprowadzi stan z jednego punktu w drugi. Przyczyną nierozdzielności względem stanu może być niezamierzona nadmiarowość wektora stanu w budowanym modelu procesu lub specyficzny dobór parametrów systemu dających za dużo symetrii (np. na dwie jednakowe masy połączone sprężyną oddziałują dwie takie same siły (sterowania) o przeciwnych zwrotach – nie ma możliwości zmiany położenia ich środka ciężkości).

9.2 Warunek konieczny i dostateczny sterowalności układu liniowego

WARUNKIEM KONIECZNYM I DOSTATECZNYM X-STEROWALNOŚCI UKŁADU LINIOWEGO, STACJONARNEGO:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

GDZIE $\forall t \geq 0: x(t) \in \mathbb{R}^n$

JEST, ABY RZĄD MACIERZY Q_C BYŁ RÓWNY n .

$$Q_C = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B]$$

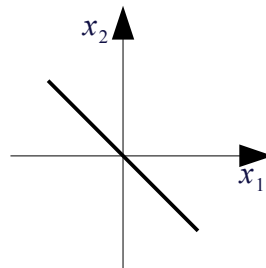
Jeśli Q_C jest osobiwa, to system nie jest sterowalny w całej przestrzeni, ale może być sterowalny w podprzestrzeni stanu. Podprzestrzeń sterowalności jest określona przez kolumny liniowo niezależne macierzy Q_C .

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0]$$

$$Q_C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ - system X-niesterowalny}$$

$$G(s) = C[sI - A]^{-1}B = \frac{s}{s(s+1)}$$

W transmitancji występuje uproszczenie licznika z mianownikiem. Kierunek $[1 \quad -1]^T$ pokazuje podprzestrzeń sterowalności.



Rysunek 9.3: Podprzestrzeń sterowalności

Niesterowalność występuje w przypadku, gdy w transmitancji występują uproszczenia licznika i mianownika.

9.3 Sterowalność układów liniowych dyskretnych

Warunek X-sterowalności dla układów dyskretnych

$$x_{k+1} = A_D x_k + B_D u_k$$

jest taki sam jak dla ciągłych:

$$Q_C = [B_D \quad A_D B_D \quad A_D^2 B_D \quad \dots \quad A_D^{n-1} B_D]$$

$$\text{rzęd } Q_C = n$$

Postać tę można wyprowadzić z rozwiązania równania, wykazując dodatkową cechę układów dyskretnych – jeśli układ jest sterowalny, to stan dowolny x_0 można sprowadzić do początku układu w n lub mniej krokach:

$$x_n = A_D^n x_0 + \sum_{i=0}^{n-1} A_D^{n-1-i} B_D u_i = A_D^n x_0 + [B_D \quad A_D B_D \quad \dots \quad A_D^{n-1} B_D] \begin{bmatrix} u_{n-1} \\ \vdots \\ u_0 \end{bmatrix} = A_D^n x_0 + Q_C \cdot u$$

Dla układu jednowymiarowego sterowanie stabilizujące do $x_n = 0$ ma więc postać wektora $u \in \mathbb{R}^n$ (próbki w odwrotnej kolejności):

$$u = -Q_C^{-1} \cdot A_D^n x_0$$

Jest to jednocześnie przepis na kształt sterowania programowego w układzie otwartym (sterownik programowalny).

9.4 Obserwowalność

Układ jest obserwowalny, jeżeli jest możliwe odtworzenie wektora stanu na podstawie pomiarów wyjścia i ewentualnie wejścia układu sterowanego.

„Soft sensor” - nie mierzymy, a wiemy.

W przypadku liniowych układów dynamicznych przy badaniu podstawowego warunku obserwowalności można bez straty ogólności założyć, że sterowania są zerowe. Warunek ten zaprezentujemy więc dla znanego ciągłego, liniowego, stacjonarnego układu swobodnego:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$

gdzie dla $\forall t \geq 0: x(t) \in \mathbb{R}^n, y(t) \in \mathbb{R}^m$.

Jeżeli $m < n$ to nie można odwrócić prostokątnej macierzy C i rozwiązywać na bieżąco równania $x(t) = C^{-1}y(t)$.

9.5 Kryterium obserwowalności

Dla zapewnienia obserwowalności ciągłego, liniowego, stacjonarnego układu swobodnego

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$

gdzie $\forall t \geq 0: x(t) \in \mathbb{R}^n, y(t) \in \mathbb{R}^m$

rzęd prostokątnej macierzy Q_o , o $m \cdot n$ wierszach musi równać się n .

$$Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

9.6 Podział obserwatorów

Jeśli układ jest obserwowalny względem stanu, to można podać algorytm (sposób) przetwarzania sygnału $y(t)$ tak, aby przy pomocy macierzy A, B, C wyliczyć $x(t)$ (stan). Taki algorytm nazywa się **obserwatorem stanu**.

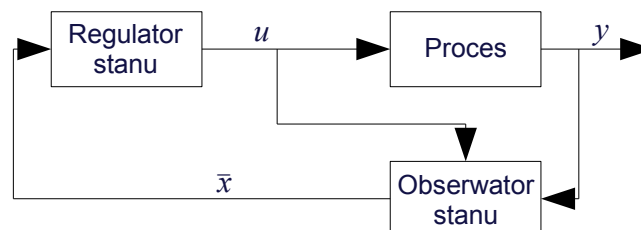
Rozróżniamy obserwatory dokładne, które po zarejestrowaniu przebiegu $y(t)$ na przedziale $[0, T']$ odtwarzają stan dokładny $x(T')$. Można też budować obserwatory niedokładne, takie, które nie potrzebują pamięci i okna pomiarowego w przedziale $[0, T']$. Wykorzystując na bieżąco pomiar $y(t)$ zwracają od razu $\bar{x}(t)$, gdzie $\bar{x}(t)$ jest tylko estymatą stanu, ale gwarantującą, że:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) - \bar{x}(t)) \rightarrow 0$$

Kształt tych estymatorów ma postać równania różniczkowego:

$$\dot{\bar{x}}(t) = (A - GC)\bar{x}(t) + Bu(t) + Gy(t), \quad \bar{x}(0) = \bar{x}_0$$

Szybkość zbieżności w obserwatorze nastawiamy w macierzy G (do dyspozycji projektanta). Estymatory asymptotyczne znane są pod nazwą obserwatora Luenbergera lub Kalmana-Bucy.

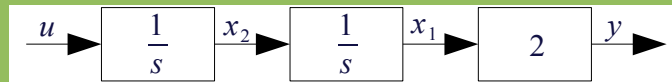


Rysunek 9.4: Schemat regulacji

Regulatorem stanu są tylko bloki wzmacniające:

$$u = -(K_1 \bar{x}_1 + K_2 \bar{x}_2 + \dots + K_n \bar{x}_n) = - \begin{bmatrix} K_1 & \dots & K_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{bmatrix} = -K \cdot \bar{x}$$

Obserwator Luenbegera dla układu $G(s) = \frac{2}{s^2}$ (rysunek 9.5):



Rysunek 9.5: Obiekt obserwowany

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [2 \quad 0]$$

Macierze wzmocnień obserwatora G i stanu F :

$$G = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}, \quad F = A - GC = \begin{bmatrix} -2g_1 & 1 \\ -2g_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad |sI - F| = s^2 + 2g_1s + 2g_2 = 0$$

$$s_{1,2} = -g_1 \pm \sqrt{g_1^2 - 2g_2}$$

Dla założonych $s_1 = -2$ i $s_2 = -4$ z powyższych wzorów otrzymuje się $g_1 = 3$ i $g_2 = 4$. Obserwator ma postać:

$$\dot{\bar{x}}(t) = \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ -8 & 0 \end{bmatrix} \bar{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} y(t)$$

Bardziej ujemne s = szybciej maleje eksponenta + większe oscylacje

10 Regulatory wielowymiarowe

10.1 Wskaźniki jakości

- $J = \int_{t_0}^{\infty} \varepsilon_p^2(t) dt$ – błąd regulacji rozłożony w czasie
- $J = \int_{t_0}^{t_1} u^2(t) dt$ – koszt energii sterowania
- $J = \int_{t_0}^{t_1} |u(t)| dt$ – wielkość wydatku (zużycia) paliwa
- $J = \int_{t_0}^{\infty} [x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)] dt$ – kompromis pomiędzy jakością stabilizacji i kosztami sterowania ustalany macierzami wagowymi Q (dodatnio półokreślona – może jej nie być) i R – dodatnio określona – musi być zawsze)
 - czas ustalania
 - maksymalne przeregulowanie

10.2 Regulator LQR

Wskaźnik $J = \int_{t_0}^{\infty} [x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)] dt$ jest związany z podstawowym problemem optymalizacji regulatora liniowego od stanu z kwadratowym wskaźnikiem jakości (*Linear Quadratic Regulator – LQR*).

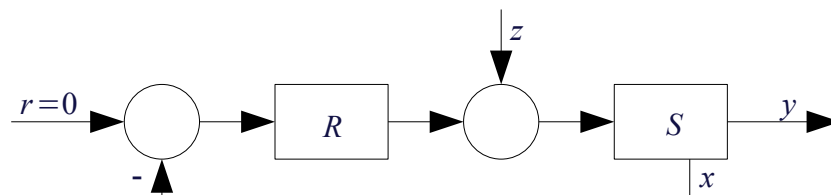
Na **każdej** zmiennej stanu jest regulator P .

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) \neq 0$$

$$y(t) = Cx(t)$$

dla $\forall t > 0: x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^r, y(t) \in \mathbb{R}^m$

Funkcje sterujące $u_i(\cdot) \in L^2[0, T]$ są ograniczone co do energii, ale nie są ograniczone co do amplitudy.



Rysunek 10.1: Schemat blokowy

Wskaźnik jakości:

$$J = 0.5 \int_{t_0}^{\infty} [x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)] dt$$

Sterowanie optymalne:

$$u^O(t) = -K x(t) = -R^{-1} B^T K x(t)$$

Optymalna macierz współczynników wzmocnienia regulatora $K(t)$ jest prostokątna $[r \times n]$. Macierz $K(t)$ jest kwadratowa.

$$u_1 = -(k_{11} x_1 + k_{12} x_2 + k_{13} x_3)$$

$$u_2 = -(k_{21} x_1 + k_{22} x_2 + k_{23} x_3)$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$u = -Kx$$

10.3 Algebraiczne równanie Riccatiego

Stała macierz K minimalizująca wskaźnik J jest równa wartości ustalonej rozwiązania równania różniczkowego Riccatiego $K(\infty)$. Jest też jednocześnie rozwiązaniem równania algebraicznego Riccatiego ARE (*Algebraic Riccati Equation*):

$$0 = KA + A^T K - KBR^{-1}B^T K + Q$$

dla $LQR(A, B, C, D, Q, R)$

Uwagi:

- Jeżeli para (A, B) jest sterowalna (wystarczy stabilizowalna), to istnieje ograniczone, symetryczne rozwiązanie ARE w postaci macierzy K^O .
- Jeżeli dodatkowo para (A, C) jest obserwowalna, to K^O jest jedyna i dodatnio określona.
- Najważniejszym stwierdzeniem jest, że **system zamknięty z regulatorem stacjonarnym LQR jest asymptotycznie stabilny**. Nie może bowiem żadna ze składowych zmiennej stanu x narastać do nieskończoności, gdy wskaźnik jakości ma skończoną wartość stałą.
- Przyjęcie macierzy wagowej $Q = C^T C$ daje $x^T(t) Q x(t) = x^T(t) C^T C x(t) = y^T(t) y(t)$, co można interpretować jako najlepszą stabilizację względem wyjścia $y(t)$.

Dany jest system liniowy podwójnie całkujący $G(s) = \frac{1}{s^2}$ lub $\ddot{y}(t) = u(t)$.

Odpowiada mu równanie stanu ze sterowalnymi i obserwowalnymi parami macierzy (A, B) i (A, C) :

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_2(t) \\ x_2(t) &= u(t) \\ y(t) &= x_1(t) \end{aligned} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [1 \quad 0]$$

Znaleźć liniowy statyczny regulator LQR minimalizujący wskaźnik kwadratowy z wagą r :

$$J = \int_0^{\infty} [y^2(t) + r \cdot u^2(t)] dt$$

Sterowanie optymalne dane jest wzorem $u^O(t) = -r^{-1} B^T K x(t) = -K x(t)$

Stała **symetryczna** macierz $K [2 \times 2]$ spełnia równanie algebraiczne Riccatiego:

$$KA + A^T K - KBr^{-1}B^T K + Q = 0$$

$$J = \int_0^{\infty} [y^T(t) + r \cdot u^T(t)] dt = \int_0^{\infty} \begin{bmatrix} x^T(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ r \cdot u(t) \end{bmatrix} dt, \text{ stąd waga } Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_2 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_2 & k_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_2 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{r} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A potem trzeba coś takiego rozwiązać, podstawić do u^O , wyliczyć macierz stanu układu zamkniętego $A_z = [A - BK]$ i jego transmitancję...